

Hausaufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1 (Reelle Zahlen). Berechnen Sie per Hand:

- a) $\ln(e^3)$ b) $\log_{10}(100)$ c) $\log_2(64)$ d) $\log_2(\frac{1}{64})$ e) $\log_{1/2}(64)$

Aufgabe 1.2 (Grenzwerte I). Sei

$$a_n = 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ und beweisen Sie diesen mit der Grenzwertdefinition, d.h. finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so dass

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a - a_n| < \varepsilon$$

gilt.

Aufgabe 1.3 (Grenzwerte II). Sei

$$a_n = -1 + \frac{4}{n^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ und beweisen Sie diesen mit der Grenzwertdefinition.

Aufgabe 1.4 (Grenzwerte III). Bestimmen Sie (mit Rechnung) die Grenzwerte für folgende Folgen.

a) $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{n^3 + n^2 - 1},$

b) $b_n = \frac{n^3 - n + 2}{n^3 + n^2 - 1},$

Aufgabe 1.5 (Grenzwerte IV). Bestimmen und begründen Sie mit den Grenzwertkriterien die Grenzwerte.

a) $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$

b) $g_n = (-1)^n \cdot n^{-1},$

c) $h_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}.$

Aufgabe (Zusatz) 1.6 (Komplexe Zahlen). Berechnen Sie

$$\frac{5 + 3i}{(7 - 2i)^{-1} \cdot (1 - 2i)} \cdot |\overline{3 - 4i}| - \overline{(2 - 3i)}$$

und geben Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe (Zusatz) 1.7 (Ungleichungen). Bestimmen Sie die Lösungsmengen (in \mathbb{R}) der folgenden Ungleichungen.

- a) $|x + 3| < 5$,
- b) $x^2 - 2x \leq 3$,

Aufgabe (Zusatz) 1.8 (Vollständige Induktion). Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:¹

- a) Es gilt

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

- b) Es gilt

$$2^n > n + 1$$

für alle $n \geq 2$.

¹(IA): Zeigen Sie die Aussage stimmt für ein $n = n_0$ (hier $n_0 = 1$ in (a) und $n_0 = 2$ in (b)).

(IS): Zeigen Sie, wenn die Aussage für ein n gilt, dann auch für $n + 1$. Siehe Tutorienblatt 1-und-2.