Hausaufgabenblatt 2 (Lösungen)

Aufgabe 2.1. Welche dieser Folgen konvergieren? Welche Folgen sind bestimmt divergent? Berechnen Sie die Grenzwerte der konvergenten Folgen.

a) $a_n = 2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n$ b) $b_n = 2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^n$ c) $c_n = \frac{n^{10}+9n^2-1}{3n^{10}-n^9+8n}$

d) $d_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ e) $e_n = \frac{n+1}{n^2}$ f) $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

g) $g_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n}$ h) $h_n = \sqrt[2]{4 \cdot n^5}$ i) $i_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2 - 1}{n^2+3n+2}$

***Lösung*:**

a) $a_n \to 2$

b) b_n divergent und nicht bestimmt divergent.

c) $c_n \to \frac{1}{3}$

d) $d_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \to \frac{1}{2}$

e) $e_n \to \infty$

f) $f_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$

g) $g_n \to 0$

h) $h_n \to \infty$

i) i_n divergent und nicht bestimmt divergent.

Aufgabe 2.2. Finden Sie Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, so dass gilt:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$,

***Lösung*:** $a_n = n^2$ und $b_n = n^{-1}$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$,

***Lösung*:** $a_n = n$ und $b_n = c \cdot n^{-1}$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty$,

***Lösung*:** $a_n = n^2$ und $b_n = -n^{-1}$

d) $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Lösung: $a_n = n$ und $b_n = (-1)^n \cdot n^{-1}$

Aufgabe 2.3. Finden Sie eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass a divergiert aber $b = (|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösung: $a_n = (-1)^n$

Aufgabe (Zusatz) 2.4. Bestimmen und begründen Sie mit den Grenzwertkriterien für folgende Folgen die (gegebenenfalls bestimmt divergenten) Grenzwerte.
Hinweis: $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, Quotientenkriterien auf dem Tutorien-/Selbstübungsblatt 1.

a) $a_n = n^3 - n^2 + 4n - 5$,

Lösung: Wir haben

$$a_n = n^3 - n^2 + 4n - 5 \overset{n\geq 2}{\geq} n^3 - n^2 = n^2(n-1) \geq n^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad a_n \to \infty.$$

b) $b_n = \dfrac{2^n}{n^2}$,

Lösung: Wir haben

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = 2 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 2 > 1$$

und somit mit dem Quotientenkriterium II folgt: $b_n \to \infty$.

c) $c_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}$,

Lösung: Mit dem Hinweis $\sqrt[n]{n} \to 1$ haben wir den Fall "'beschränkte (sogar konvergente) Folge MAL Nullfolge = Nullfolge": $c_n \to 0$.

d) $d_n = 2 + \left(\dfrac{-2}{5}\right)^n$.

Lösung: Wir schauen uns $d'_n = \left(\frac{-2}{5}\right)^n$ an. Wir erhalten

$$\frac{|d'_{n+1}|}{|d'_n|} = \frac{\left|\frac{-2}{5}\right|^{n+1}}{\left|\frac{-2}{5}\right|^n} = \frac{2}{5} < 1$$

und somit mit dem Quotientenkriterium I folgt $d_n' \to 0$. Also haben wir den Fall der Summe zweier konvergenten Folgen:

$$d_n = 2 + \left(\frac{-2}{5}\right)^n \to 2 + 0 = 2.$$

e) $e_n = \sqrt[3n]{4 \cdot n^5}$,

***Lösung*:** Wir schreiben die Folge um:

$$e_n = \sqrt[3n]{4 \cdot n^5} = (\sqrt[n]{4})^{1/3} \cdot (\sqrt[n]{n})^{5/3}$$

und erhalten mit den Hinweisen

$$\sqrt[n]{4} \to 1 \qquad \text{und} \qquad \sqrt[n]{n} \to 1$$

dann zusammen[1]

$$e_n = \sqrt[3n]{4 \cdot n^5} = (\underbrace{\sqrt[n]{4}}_{\to 1})^{1/3} \cdot (\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1})^{5/3} \to 1^{1/3} \cdot 1^{5/3} = 1.$$

[1] Hier schummeln wir ein wenig. Eigentlich müsste man noch argumentieren, dass $(\,\cdot\,)^{1/3}$ und $(\,\cdot\,)^{5/3}$ stetig sind und daher die Grenzwerte reingezogen werden können. Aber solange kann ich nicht warten, sonst bleiben nur die absolut langweiligen Aufgaben übrig.