Hausaufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 (Reihen I)**.**

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}(x-2)^n? \tag{1}$$

b) Wenn die Reihe (1) für ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, wie ist der Wert der Reihe (1)?

Aufgabe 3.2 (Reihen II)**.** Welche Reihen sind (absolut) konvergent? Welche (bestimmt) divergent? Begründen Sie. Berechnen Sie keine Grenzwerte.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^3}$

c) $\sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sqrt{j} - \sqrt{j-1}\right)$

Aufgabe 3.3 (Reihen III)**.** Welche Reihen sind (absolut) konvergent? Welche (bestimmt) divergent? Begründen Sie. Berechnen Sie keine Grenzwerte.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5^{2k}}$

b) $\sum_{d=0}^{\infty} \frac{7}{(4d)!}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{3k}}{5^{2k}}$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{j}}\right)$

Aufgabe 3.4 (Stetigkeit I)**.** Sei $f(x) = x^3$. Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Definition von Stetigkeit, dass f stetig in $x_0 = 0$ ist.

Aufgabe 3.5 (Stetigkeit II)**.** Die Funktion

$$h(x) = \operatorname{sign} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Wo ist sie überall stetig und wo genau nicht? Zeigen Sie dies mit Hilfe der Definition Stetigkeit mittels Folgen.