Hausaufgabenblatt 4 (Lösungen)

Hinweis:

$$(\ln x)' = x^{-1} \quad (x > 0), \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

Aufgabe 4.1 (Zwischenwertsatz)**.** Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion

$$f : [a, b] \to [a, b]$$

mit $a < b$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $\tilde{x} \in [a, b]$ mit $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

(Hinweis: Schauen Sie sich die Funktion $h(x) := f(x) - x$ an.)

***Lösung*:** Setze $h(x) := f(x) - x$. Dann ist h als Summe zweier stetiger Funktionen auf $[a, b]$ selbst stetig auf $[a, b]$. Wir haben aber auch

$$h(a) = f(a) - a \geq 0 \qquad \text{und} \qquad h(b) = f(b) - b \leq 0$$

da $a \leq f(x) \leq b$ gilt. Somit hat h in $[a, b]$ ein Vorzeichenwechsel was mit dem Zwischenwertsatz ein $\tilde{x} \in [a, b]$ impliziert mit $h(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - \tilde{x} = 0$ impliziert oder $h(a)$ bzw. $h(b) = 0$ gelten schon.

Aufgabe 4.2 (Produktregel)**.** Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $a(x) = x^2 \cdot \ln x$ für $x > 0$,

***Lösung*:** $a'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot x^{-1} = \underline{\underline{2x \cdot \ln x + x}}$

b) $b(x) = \arcsin x \cdot \sin x$ für $-1 < x < 1$, und

***Lösung*:** $b'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin x + \arcsin x \cdot \cos x = \underline{\underline{\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \cdot \cos x}}$

c) $c(x) = x^4 \cdot \ln x \cdot \sin x \cdot \cos x$ für $x > 0$.

***Lösung*:** $c'(x) = 4x^3 \cdot \ln x \cdot \sin x \cdot \cos x + x^4 \cdot x^{-1} \cdot \sin x \cdot \cos x + x^4 \cdot \ln x \cdot \cos x \cdot \cos x + x^4 \cdot \ln x \cdot \sin x \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{x^3 \cdot (4 \ln x + 1) \cdot \sin x \cdot \cos x + x^4 \cdot \ln x \cdot ((\cos x)^2 - (\sin x)^2)}}$

Aufgabe 4.3 (Quotientenregel)**.** Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $d(x) = \tan x$ auf dem Definitionsbereich von tan,

Lösung: $d'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{(\cos x)^2}}}$

b) $e(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ für $x \neq 1$, und

Lösung: $e'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{(x-1)^2}}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Lösung: $f'(x) = \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)' = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2x^2-1}{(x^2+x+1)^2}}}$

Aufgabe 4.4 (Kettenregel)**.** Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $g(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$ für $x > 0$,

Lösung: $g'(x) = \left(\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}\right)' = (x^{3/4})' = \frac{3}{4} x^{-1/4} = \underline{\underline{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}}}.$

b) $h(x) = \ln(1 + e^{\arcsin x})$ für $-1 < x < 1$ und

Lösung: $h'(x) = \frac{1}{1+e^{\arcsin x}} \cdot e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{\frac{e^{\arcsin x}}{(1+e^{\arcsin x}) \cdot \sqrt{1-x^2}}}}$

c) $i(x) = x^x$ für $x > 0$.

Lösung: $i(x) = e^{x \cdot \ln x}$, d.h. $i'(x) = e^{x \cdot \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot x^{-1}) = \underline{\underline{x^x \cdot (\ln x + 1)}}.$