

Hausaufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1 (Integrale IV). Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^2 x^3 \cdot \exp(-x^2) dx$ b) $\int_0^\infty x^3 \cdot \exp(-x^2) dx$ c) $\int_{-\infty}^\infty x^3 \cdot \exp(-x^2) dx$

Aufgabe 6.2 (Spezielle Tricks in der Integration). Lesen Sie sich die Methode der *Partialbruchzerlegung* an und lösen Sie damit die folgenden Integrale:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} dx$ b) $\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+2)} dx$ c) $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+2)} dx$

Aufgabe 6.3. Berechnen Sie für folgende Funktionen die Taylor-Polynome an $x_0 \in \mathbb{R}$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ mit $x_0 = 1$ und $n = 3$.

b) $g(x) = \ln(1 + x^2)$ mit $x_0 = 0$ und $n = 4$.

c) $h(x) = x^{-1}$ mit $x_0 = 1$ und beliebigen $n \in \mathbb{N}$.

d) $k(x) = x^{17} \cdot \exp(-x^3)$ mit $n = 1234$ und $x_0 = 0$.

Aufgabe 6.4 (Wiederholung: Zwischenwertsatz). Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{x^5 - 5x + 7}{x^2 + 1} = \sqrt[4]{x^8 + 1}$$

eine Lösung in \mathbb{R} besitzt.

Aufgabe (Zusatz) 6.5. Bestimmen Sie die folgenden (einseitigen) Grenzwerte, wenn sie existieren. Nutze ggf. die Regel von de l'Hospital.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^3) - 1}{x^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x/2)}{1 - \cos(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \cdot \ln(x) \quad (\alpha \leq 0)$ f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^\alpha \cdot \ln(x) \quad (\alpha > 0)$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln(1 + 1/x)$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x-1}$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} \quad (n \in \mathbb{N}, a > 1)$

Aufgabe (Zusatz) 6.6. Die ESA will einen zylinderförmigen Satelliten mit Radius r (in m) und Höhe h (in m) bauen. Das Material für die Spezialummantelung reicht aber nur für eine Fläche A (in m^2). Wie muss r und h gewählt werden, damit das Volumen V (= Platz für Messinstrumente) maximal wird? Begründe/beweise.