# Hausaufgabenblatt 6 (Lösungen)

**Aufgabe 6.1** (Integrale IV)**.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^2 x^3 \cdot \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^3 \cdot \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3 \cdot \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x$

***Lösung*:** Da die Integrale alle über

$$f(x) = x^3 \cdot \exp(-x^2)$$

gehen, bestimmen wir zuerst eine Stammfunktion von $f$ (wir lassen das $+c$ hier also weg):

$$F(x) = \int x^3 \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

mit Substitution $y = -x^2$, d.h. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x$, haben wir

$$\begin{aligned}
&= \int x^3 \exp(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{-2x}\\
&= -\frac{1}{2}\int x^2 \exp(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2}\int y \exp(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und partieller Integration

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} y \exp(y) - \frac{1}{2}\int \exp(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2}(y-1)\exp(y)\\
&= \frac{1}{2}(-x^2-1)\exp(-x^2).
\end{aligned}$$

Wir können daher nun die Integrale auf Grundlage der Stammfunktion berechnen.

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^3 \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(-x^2-1)\exp(-x^2)\Big|_{x=0}^2\\
&= \frac{1}{2}(-4-1)\exp(-4) - \frac{1}{2}(0-1)\exp(0)\\
&= \frac{-5}{2}e^{-4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3 \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^3 \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}(-R^2-1)\exp(-R^2) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{R\to\infty} \frac{-R^2-1}{\exp(R^2)} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{R\to\infty} \frac{-2R}{2R\exp(R^2)} \\ &= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty x^3 \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 x^3 \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x + \int_0^\infty x^3 \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0,\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 x^3 \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x &= \int_\infty^0 -y^3 \exp(-y^2)\cdot(-1)\ \mathrm{d}y \\ &= -\int_0^\infty y^3 \exp(-y^2)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

mit der Substitution $y = -x$.

**Aufgabe 6.2** (Spezielle Tricks in der Integration)**.** Lesen Sie sich die Methode der *Partialbruchzerlegung* an und lösen Sie damit die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}\ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+2)}\ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+2)}\ \mathrm{d}x$

***Lösung*:**

a) Aus der Partialbruchzerlegung folgt:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)},$$

d.h. aus Koeffizientenvergleich folgt $2A = 1$ und $A + B = 0$, d.h. $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$. Das Integral berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln(x) - \ln(x+2)]\Big|_{x=1}^2 \\ &= \frac{1}{2}[\ln(2) - \ln(1) - \ln(4) + \ln(3)] = \frac{1}{2}[\ln(3) - \ln(2)]\end{aligned}$$

b) Mit (a) folgt

$$\frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+2)} + \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2},$$

und somit folgt das Integral

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln(x) + \ln(x+2)]\Big|_{x=1}^2 \\ &= \frac{1}{2}[\ln(2) - \ln(1) + \ln(4) - \ln(3)] = \frac{1}{2}[3\ln(2) - \ln(3)]\end{aligned}$$

c) Wie in (b) lässt sich der Bruch wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x(x+2)} &= \frac{x^2+2x-2x+1}{x(x+2)} = 1 + \frac{-2x+1}{x(x+2)} = 1 + \frac{-2}{x+2} + \frac{1}{x(x+2)} \\ &= 1 + \frac{-2}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\end{aligned}$$

und damit ergibt sich das Integral

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+2)} &= \int_1^2 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{5}{x+2}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2}[\ln(x) - 5\ln(x+2)]\Big|_{x=1}^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}[\ln(2) - \ln(1) - 5\ln(4) + 5\ln(3)] = 1 + \frac{1}{2}[5\ln(3) - 9\ln(2)]\end{aligned}$$

**Aufgabe 6.3.** Berechnen Sie für folgende Funktionen die Taylor-Polynome an $x_0 \in \mathbb{R}$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ mit $x_0 = 1$ und $n = 3$.

b) $g(x) = \ln(1 + x^2)$ mit $x_0 = 0$ und $n = 4$.

c) $h(x) = x^{-1}$ mit $x_0 = 1$ und beliebigen $n \in \mathbb{N}$.

d) $k(x) = x^{17} \cdot \exp(-x^3)$ mit $n = 1234$ und $x_0 = 0$.

***Lösung*:**

a)

$$\begin{aligned}T_3 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 0 + 9(x-1) + 7(x-1)^2 + 3(x-1)^3 \\ &= 9(x-1) + 7(x-1)^2 + 3(x-1)^3\end{aligned}$$

b) ln ist als Reihe definiert: $\ln(1+y) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{y^i}{i}$. Setze $y = x^2$, dann folgt $\ln(1+x^2) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{x^{2i}}{i}$ und somit die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ als

$$T_4 \ln(1+x^2) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\frac{x^{2i}}{i} = x^2 - \frac{x^4}{2}.$$

c) Schreibe $h(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{i=0}^{\infty}(x-1)^i$ mittels Geometrischer Reihe, dann gilt

$$T_n h = \sum_{i=0}^{n}(x-1)^i.$$

d) Wir haben $\exp(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{y^i}{i!}$ und mit $y = -x^3$ somit $\exp(-x^3) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{3i}}{i!}$ und $x^{17}\exp(-x^3) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{3i+17}}{i!}$. Das Taylorpolynom hat damit die Gestalt

$$T_{1234}k = \sum_{i=1}^{405}\frac{(-1)^i x^{3i}}{i!}.$$

**Aufgabe 6.4** (Wiederholung: Zwischenwertsatz)**.** Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{x^5 - 5x + 7}{x^2 + 1} = \sqrt[4]{x^8 + 1}$$

eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt.

***Lösung*:** Setze $g(x) := \frac{x^5 - 5x + 7}{x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^8 + 1}$. Dann gilt

$$g(x) = x^3 \cdot \frac{1 - 5x^{-4} + 7x^{-5}}{1 + x^{-2}} - x^2 \cdot \sqrt[4]{1 + x^{-8}}$$

und somit auch

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

Der erste Grenzwert besagt, dass es ein $r < 0$ gibt mit $g(r) < 0$. Der zweite Grenzwert besagt, dass es ein $R > 0$ gibt mit $g(R) > 0$. Da $g$ auf $\mathbb{R}$ und somit auch auf $[r, R]$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [r, R]$ mit $g(x_0) = 0$. Dieses $x_0$ löst die Gleichung.

**Aufgabe (Zusatz) 6.5.** Bestimmen Sie die folgenden (einseitigen) Grenzwerte, wenn sie existieren. Nutze ggf. die Regel von de l'Hospital.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)-1}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x/2)}{1-\cos(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$ e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \cdot \ln(x) \quad (\alpha \leq 0)$ f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \cdot \ln(x) \quad (\alpha > 0)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln(1+1/x)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} \quad (n \in \mathbb{N},\ a>1)$

***Lösung***: Wir kürzen mit $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ab, dass dieser Fall im Grenzwert vorliegt und daher die Regel von de l'Hospital angewendet kann:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\cos(x)}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)-1}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2\sin(x^2)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \sin(x^2) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x/2)}{1-\cos(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin(x/2)}{\sin(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos(x/2)}{\cos(x)} = \frac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-1}-2}{1-\cos(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^x}{\sin(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-1}}{\cos(x)} = 2$

e) 1. Fall ($\alpha = 0$): $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

2. Fall ($\alpha < 0$): $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \cdot \ln(x) \overset{\infty\cdot(-\infty)}{=} -\infty$

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \cdot \ln(x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-1}{\alpha} x^\alpha = 0$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln(1+x^{-1}) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^{-1})}{x^{-1}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1+x^{-1})(-x^{-2})}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to\infty} 1+x^{-1} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{x^{-1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}}{-x^{-2}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{(1+x^{-1})(1-x^{-1})} = 2$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{\ln(a)\cdot a^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \ldots \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n!}{(\ln a)^n \cdot a^x} = 0$

**Aufgabe (Zusatz) 6.6.** Die ESA will einen zylinderförmigen Satelliten mit Radius $r$ (in m) und Höhe $h$ (in m) bauen. Das Material für die Spezialummantelung reicht aber nur für eine Fläche $A$ (in $\mathrm{m}^2$). Wie muss $r$ und $h$ gewählt werden, damit das Volumen $V$ (= Platz für Messinstrumente) maximal wird? Begründe/beweise.

***Lösung*:**

- $A_1 = 2 \cdot \pi \cdot r^2$ (Deckel + Boden)
- $A_2 = 2\pi \cdot r \cdot h$ (Mantelfläche)
- $A = A_1 + A_2 = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (konstant)
- $h = \frac{A-2\pi r^2}{2\pi r}$
- $V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \frac{A-2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2}(Ar - 2\pi r^3) = V(r)$
- Extremum von $V(r)$: $0 = V'(r) = \frac{1}{2}(A - 6\pi r^2)$, d.h. $r_{\text{extr}} = \pm\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$, physikalisch sinnvoll: $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$
- Maximum: $V''(r_{\text{extr}}) = -6\pi r_{\text{extr}} < 0$ und $V'''(r) = -6\pi \neq 0$, also (lokales) Maximum.
- Lösung: $r_{\max} = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ und $h = 2r_{\max}$