Hausaufgabenblatt 7 (Lösungen)

Aufgabe 7.1 (Potenzreihen, Wiederholung)**.** Berechnen Sie die Konvergenzradien.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$

***Lösung*:** $a_k = 2^k$, d.h. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2$ und somit $R = \frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \cdot x^n$

***Lösung*:** $a_n = \frac{n!}{(2n)!}$, d.h. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot (2n)!}{n! \cdot (2n+2)!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$ und somit $R = \infty$.

c) $\displaystyle\sum_{j=4}^{\infty} 3^{-j} \cdot j^3 \cdot x^j$

***Lösung*:** $a_j = 3^{-j} \cdot j^3$, d.h. $\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{3^j \cdot (j+1)^3}{3^{j+1} \cdot j^3} \to \frac{1}{3}$ und somit $R = 3$.

Aufgabe 7.2 (Linear (Un)Abhängigkeit)**.** Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ \pi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig oder unabhängig?

***Lösung*:** Linear abhängig, da vier Vektoren in einem 3-dimensionalen Raum immer linear abhängig sind.

Aufgabe 7.3 (Lineare (Un)Abhängigkeit)**.** Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig?

***Lösung*:** Ja, nach lösen des homogenen Gleichungssystems.

b) Bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Wieso (nicht)?

***Lösung*:** Ja, 3 linear unabhängige Vektoren nach a).

c) Schreiben Sie v_4 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3.

***Lösung*:** $v_4 = v_1 + 2v_2 + 3v_3$.

Aufgabe 7.4 (Linear Unterräume)**.** Welche der folgenden Mengen im $\mathbb{R}^3$ sind linear Unterräume und welche nicht? Zeigen Sie dies in jedem Fall.

a) $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$

***Lösung*:** Ja, es ist ein Unterraum. Nachweis der Unterraumkriterien:

(i) Für $(x, y, z), (u, v, w) \in V$ haben wir

$$2(u + x) + 3(v + y) - (w + z) = 2u + 3v - w + 2x + 3y - z = 0 + 0 = 0,$$

d.h. $(u + x, v + y, w + z) \in V$.

(ii) Für $(x, y, z) \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ haben wir

$$2ax + 3ay - az = a \cdot (2x + 3y - z) = a \cdot 0 = 0,$$

d.h. $(ax, ay, az) \in V$.

b) $W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z = 1\}$

***Lösung*:** Nein, kein Unterraum, denn wir haben $(1, 0, 0) \in W$ aber $2 \cdot (1, 0, 0) = (2, 0, 0) \notin W$ da $2^2 - 0^2 + 0 = 4 \neq 1$.