Mathematik II – Analysis

für Biochemie und Umweltwissenschaften

Philipp J. di Dio

TU Berlin / Uni Greifswald

8. April 2019

- Dozent: Dr. rer. nat. Philipp J. di Dio, eMail: didio@tu-berlin.de
- Büro: Walther–Rathenau–Straße 47, Zimmer A 3.09
- Sprechstunde: nach Vereinbarung (Mo oder Di)
- Vorlesung: Mo $8^{\underline{15}}$ – $9^{\underline{45}}$ HS 2 Lohmeyer-Platz 6
- Übungen: - di Dio: Mo $14^{\underline{15}}$ HS Rub 2b, Di $12^{\underline{15}}$ Rub 3,
  - Youssef: Mi $8^{\underline{15}}$ Rub 2b
- Übungsblätter: TU-Seite von Philipp J. di Dio
- Klausur: 22. Juli 2019, $10^{\underline{00}}$, HS 2 (Lohmeyer-Platz 6); Nachkl.: 18. Sept.

Inhalt

Kapitel 1: Folgen

Definition und einfache Beispiele

Definition

Eine Folge ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

a_n *heißt das n-te Glied der Folge a.*

Kurznotation für eine Folge:

$$a \quad = \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad = \quad (a_n) \quad = (a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \subset \mathbb{R}$$

einfache Beispiele:

1. konstante Folge: $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, $a = (c, c, c, \dots)$
2. alternierende Folge: $a_n = (-1)^{n+1}$, $a = (1, -1, 1, -1, \dots)$
3. Vorschrift: $a_n = \frac{1}{n}$, $a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$
4. Fibonacci-Zahlen: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ für $n \geq 3$

$$a = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$$

Kaninchenvermehrung nach Fibonacci

Beispiel

- *Annahmen:*
  - *Start: 1 Kaninchenpaar*
  - *Geschlechtsreife: 1 Monat*
  - *Tragezeit: 1 Monat*
  - *Wurf: 1 Kaninchenpaar*
  - *Kaninchen unsterblich*
- *Notation:* (P, gP), P *Paare von Kaninchen,* gP *geschlechtsreife Paare*
- *Zeitablauf: Start (Monat 1)* $= (1,0)$, *Monat 2* $= (1,1)$, *Monat 3* $= (2,1)$, *Monat 4* $= (3,2)$, *Monat 5* $= (5,3)$, *Monat 6* $= (8,5)$, ...
- *Anzahl* P_n *von Paaren im* n*-ten Monat:*

$$P_1 = 1, \quad , P_2 = 1, \quad P_n = P_{n-2} + P_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

Monat	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	...
P = *#Paare*	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*	*21*	...

Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz

Definition

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|a_n| \leq C \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definition

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein $A \in \mathbb{R}$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|A - a_n| \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

A heißt Grenzwert (Limes) von a und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ (kurz: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ oder $a_n \to A$).
Die Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

Beispiele (Tafel): $a_n = c$, $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = (-1)^{n+1}$, Fibonacci-Zahlen

Zusammenhang Beschränktheit Konvergenz

Satz

Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Es gilt:

$$a \quad \textit{konvergent} \quad \Rightarrow \quad a \quad \textit{beschränkt.} \tag{$*$}$$

Beispiele:

- $a_n = c$
- $a_n = \frac{1}{n}$

Umkehrung von $(*)$ gilt nicht:

- $a_n = (-1)^{n+1}$

Konvergenzkriterien und Grenzwertberechnung

Satz (Satz über monotone Folgen)

Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Es gilt:

1. a *beschränkt (von oben) und monoton wachsend* $\Rightarrow$ a *konvergent.*
2. a *beschränkt (von unten) und monoton fallend* $\Rightarrow$ a *konvergent.*

Beispiel (Tafel): $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Beispiele für Grenzwerte:

a_n	c	$\frac{1}{n}$	$(1+\frac{x}{n})^n$	x^n $(\lvert x\rvert < 1)$	$\sqrt[n]{x}$, $(x>0)$	$\sqrt[n]{n}$
$\lim_{n\to\infty} a_n$	c	0	e^x	0	1	1

Konvergenzkriterien und Grenzwertberechnung

Satz

Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Dann gilt:

1. $c = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$.
2. $c = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$.
3. *Ist* $B \neq 0$ *und* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *dann ist* $c = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent mit Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.
4. *Ist* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *dann gilt auch* $A \leq B$.
5. *("Sandwich"-Theorem, "Polizisten-Regel") Für* $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $A = B$ *gilt:*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = A = B.$$

Beispiele: siehe Tafel

Bestimmte Divergenz

Definition

Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn es für jedes $M \in \mathbb{N}$ ein $N = N(M) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_n \geq M \qquad (\textit{bzw. } a_n \leq -M) \qquad \textit{für alle } n \geq N,$$

d.h. a_n überschreitet jede (obere) Schranke bzw. unterschreitet jede (untere) Schranke. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Beispiele (Tafel): $a_n = n$, $a_n = -n^4$

Bestimmte Divergenz: Rechenregeln

Satz

Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen. Es gilt:

1. $a_n \leq b_n$ *und* $\lim_{n\to\mathbb{N}} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\in\mathbb{N}} b_n = \infty.$
2. $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$
3. *Ist* $a_n > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *dann* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$
4. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*
   a. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$ *und*
   b. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$ *falls* $B > 0$.

Bemerkung:

- 1 und 3 gelten äquivalent mit $-$-Zeichen. (Übung)
- 4b gilt nicht mehr für $B = 0$. Dann sind alle Fälle

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty,\ c,\ \infty$$

mit $c \in \mathbb{R}$ möglich. (Übung)

Beispiele: siehe Tafel

Kapitel 2: Reihen

Motivation

- Verallgemeinerung endlicher Summation

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

- unendliche Reihe mit Gliedern a_i

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

- schreiben auch

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

- mehrere Bedeutungen für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$
  - Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

  - Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

    (falls er existiert)

Definition

Eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *mit Gliedern* $a_i \in \mathbb{R}$ *heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen* $s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *konvergiert. Der Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *heißt Summe oder Wert der Reihe und wird ebenfalls mit dem Symbol* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *bezeichnet:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad := \quad \lim_{n\to\infty} s_n .$$

Die Reihe heißt divergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert. Sie heißt bestimmt divergent, wenn* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergiert. Wir setzten*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad = \quad \infty \qquad \textit{oder} \qquad -\infty,$$

falls $s_n \to \infty$ *oder* $s_n \to -\infty$ *gilt.*

Summation kann auch bei $i = 0$ oder einem $i = n$ anfangen: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=n}^{\infty} a_i$.

Beispiel: Achilles und die Schildkröte

- Zenon von Elea (ca. 490 v. Chr. – 430 v. Chr.)
- Achilles läuft gegen Schildkröte, die einen Vorsprung hat
- Wenn Achilles den Vorsprung der Schildkröte zurückgelegt hat, ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter gekrochen.
- Dann muss Achilles wieder diesen Weg laufen, wobei die Schildkröte abermals ein Stück gekrochen ist, etc. etc. etc.
- So Achilles scheint die Schildkröte in dieser Weise nicht einholen zu können, ein Widerspruch!
- Auflösung des Trugschlusses:
  - (unendliche) Reihen können endliche Summen haben!
  - Das Unterteilen der Strecken in unendlich viele Teilstrecken bedeutet nicht, dass die Strecke unendlich lang ist, oder das unendlich viel Zeit zum passieren der Strecke und zum Überholen der Schildkröte erforderlich wäre
- Mathematische Formulierung des Problems/Sachverhaltes löst das Paradox.

Beispiel: Medikament im Patienten

Patient:

- alle 24h eine Medikamentendosis d
- Medikamentenabbau und -ausscheidung in 24h: 30%

Wie viel des Medikaments befindet sich nach n Tagen im Körper?

Tag	Medikament im Körper
0	d
1	$d + 0.7d$
2	$d + 0.7d + 0.7^2 d$
3	$d + 0.7d + 0.7^2 d + 0.7^3 d$
$\vdots$	$\vdots \qquad \ddots$
n	$d + 0.7d + 0.7^2 d + 0.7^3 d + \cdots + 0.7^n d = d \cdot \sum_{i=0}^{n} 0.7^i$

Was passiert bei $n \to \infty$? Bleibt die Menge an Medikament endlich oder wird sie unendlich/beliebig groß? Wenn endlich, wie hoch?

Erste Konvergenzresultate

Aus dem Satz über monotone Folgen erhalten wir:

Satz

Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *eine Reihe mit* $a_i \geq 0$. *Es gilt:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \textit{konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{es existiert } k \in \mathbb{N} \textit{ mit } \sum_{i=1}^{n} a_i \leq k \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Korollar

Für eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *mit* $a_i \geq 0$ *gilt entweder*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty \qquad \textit{oder} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty.$$

Beispiele: geometrische Reihe, harmonische Reihe

Beispiel: Geometrische Reihe

$q \in \mathbb{R}$. Geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

- Partialsummen ($q \neq 1$):

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- $|q| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

- $q \geq 1$:

$$s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n \geq 1+1+1+\cdots+1 = n+1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- $q \leq -1$: divergent, aber nicht bestimmt divergent

Beispiel: Harmonische Reihe

Harmonische Reihe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \quad = \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

- divergent:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}} + \dots = \infty$$

- alternierende Version konvergiert:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \quad = \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad = \quad \log 2$$

Addition konvergenter Reihen

Satz

Sind $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergente Reihen, dann ist auch $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha a_i + \beta b_i)$ konvergent für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) \quad = \quad \alpha \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad + \quad \beta \cdot \sum_{i=1}^{\infty} b_i .$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2^{i+1}}{3^{i-1}} + \frac{1}{7^i}\right) &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{i+1}}{3^{i-1}} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{7^i} = 6 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^i \\ &= 6 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = 18 + \frac{7}{6} = 19\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Weitere Konvergenzresultate

Satz

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \textit{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ Nullfolge (d.h. } a_i \to 0\textit{)}$$

Beispiel:

Für $q < -1$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ nicht konvergent.

Umkehrung vom Satz gilt nicht: Harmonische Reihe

$$\frac{1}{i} \xrightarrow{i\to\infty} 0 \qquad \text{aber} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

Leibniz' Konvergenzkriterium

Definition

Eine Reihe der Form $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ *mit* $a_i \geq 0$ *heißt alternierend.*

Satz (Leibniz' Konvergenzkriterium)

Ist $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

Beispiele:

- alternierende harmonische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$$

- Leibnizsche Reihe:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Satz (Majorisierte Konvergenz)

Sei $0 \leq a_i \leq b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ sei konvergent, dann ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent mit

$$0 \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Beispiel: $x \geq 0$. Exponentialreihe $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Nimm $n \in \mathbb{N}$ mit $2x \leq n$, d.h. $\frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-2} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=n-1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j+n-1}}{(j+n-1)!} \quad = \quad \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{n \cdots (n-1+j)}$$

$$\leq \quad \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \quad = \quad \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \quad = \quad \frac{2 \cdot x^{n-1}}{(n-1)!} < \infty$$

Definition: $e^x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} < \infty$ für $x \geq 0$. Insbesondere $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 2.71828...$

Absolute Konvergenz

Definition

Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *heißt* ***absolut konvergent****, wenn die Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ *konvergiert.*

Satz

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ absolut konvergent} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ konvergent}$$

Umkehrung gilt nicht:

- alternierende harmonische Reihe
- Leibniz Reihe

Majorantenkriterium

Definition

Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ *mit* $c_i \geq 0$ *heißt* ***Majorante*** *der Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ *mit reellen Gliedern, wenn es einen Index* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass gilt*

$$|a_i| \leq c_i \qquad \text{für alle } i \geq N.$$

Satz

Besitzt eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *eine konvergente Majorante* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$, *so ist sie absolut konvergent und damit auch konvergent.*

Beispiel:

- Expotentialreihe für $x < 0$

Quotientenkriterium

Satz

Sei $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ eine Reihe und es gebe ein $q \in (0,1)$ sowie ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absolut konvergent.

Beispiel: $a_j = \frac{j^2}{2^j}$.

$$\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \frac{(j+1)^2 \cdot 2^j}{2^{j+1} \cdot j^2} \to \frac{1}{2},$$

d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| \leq \frac{3}{4} = q < 1$.

Für $\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| \to q = 1$ ist kein Rückschluss auf Konvergenz möglich. Es können alle Fälle (absolute Konvergenz, Konvergenz, Divergenz) auftreten.

Wurzelkriterium

Satz

Sei $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *eine Reihe und es gebe ein* $q \in (0,1)$ *sowie ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *absolut konvergent.*

Beispiel:

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

(wichtig für die Anwendung)

Für $\sqrt[n]{|a_n|} \to q = 1$ ist kein Rückschluss auf Konvergenz möglich. Es können alle Fälle (absolute Konvergenz, Konvergenz, Divergenz) auftreten.

Cauchys Verdichtungskriterium

Satz

Sei $a = (a_j)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $a_j \geq 0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ genau dann wenn die kondensierte Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \cdot a_{2^j} \quad = \quad a_0 + 2\cdot a_2 + 4\cdot a_4 + 8\cdot a_8 + \ldots$$

konvergiert.

Beispiel: $\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s}$ (ζ - zeta)

- $s \leq 1$: divergent (harmonische Reihe)
- $s > 1$: konvergent

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j \cdot \frac{1}{2^{j\cdot s}} \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(1-s)\cdot j} \quad = \quad \sum_{j=1}^{\infty} q^j \qquad \text{mit } q := 2^{1-s}$$

Umordnung von Reihen

Definition

Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *und* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *Reihen. Wir nennen* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *eine Umordnung der Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, *wenn es eine Bijektion* $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *gibt, so dass* $b_j = a_{\sigma(j)}$ *für alle* $j \in \mathbb{N}_0$ *gilt.*

Definition

Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *heißt unbedingt konvergent, wenn jede Umordnung* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *gegen den selben Wert konvergiert. Andernfalls heißt* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *bedingt konvergent.*

Satz

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ unbedingt konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ absolut konvergent.}$$

Satz

Ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *eine bedingt konvergente Reihe reller Zahlen. Dann gibt es zu jedem* $c \in \mathbb{R}$ *oder* $c = \infty$ *oder* $c = -\infty$ *eine Umordnung mit diesem Wert.*

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad = \quad \log 2$$

konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, aber ist nicht absolut konvergent. Damit ist sie begingt konvergent und für jedes $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gibt es eine Umordnung mit diesem Wert.

Cauchy Produkt

Satz

Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergente Reihen und

$$c_j \quad := \quad a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \cdots + a_{j-1} b_1 + a_j b_0 \quad = \quad \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k}.$$

Dann konvergiert auch $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ und es gilt

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} c_j.$$

Beispiel: Für die Expotentialreihe $\exp(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ folgt aus dem Cauchy Produkt

$$\exp(x+y) \quad = \quad \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Cauchy Produkt: Beispiel $\exp$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{j-k}}{(j-k)!} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

Potenzreihen

Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad (*)$$

Potenzreihe in x. $(*)$ sind Funktionen, definiert wenn $(*)$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

- Expotentialreihe: $\exp(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- Sinus: $\sin(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- Cosinus: $\cos(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j}}{(2j)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- (natürlicher) Logarithmus: $\log(1+x) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \in (-1,1]$

Kapitel 3: Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Motivation

Bekannt: Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{oder} \qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} A.$$

Frage: Wenn wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben und wir betrachten die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Können wir etwas über die Konvergenz oder gar den Grenzwert sagen? Was muss f erfüllen, damit

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A) \qquad \text{bzw.} \qquad f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(A)$$

gilt?

Antwort: Stetigkeit!

Grenzwert-Definition

Definition

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass die Funktionswerte $f(x)$ bei Annäherung von $x \in D$ an x_0 gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ streben, in Zeichen

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

Anschauung: Wann immer wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben die gegen x_0 konvergiert, so soll auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergieren (unabhängig von der gewählten Folge!). D.h. egal wie wir x_0 mit x approximieren/annähern/etc., dann nähert sich auch $f(x)$ auch einer Zahl a an.

Achtung: $x \neq x_0$ bzw. $x_n \neq x_0$. f muss in x_0 nicht definiert sein.

Einseitige Grenzwert

Definition

f besitzt in x_0 den linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert a, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$), in Zeichen

$$f(x) \xrightarrow[x<x_0]{x\to x_0} a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = a,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_0 - x < \delta$.

Äquivalent definieren wir

$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} a, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to x_0} \infty, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

und so auch für $-\infty$.

Beispiele

Wollen

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \quad \text{mit} \quad |x_0 - x| < \delta(\varepsilon).$$

1. $f(x) = x$, $x_0 \in \mathbb{R}$:
   - Es gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a = x_0$.
   - Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, dann gilt $|f(x) - a| = |x - x_0| < \varepsilon = \delta(\varepsilon)$.
2. $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
   - Es gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a = \dfrac{1}{x_0}$.
   - Sei $1 \gg \varepsilon > 0$, x mit $|x_0 - x| < \varepsilon$ und $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}$, dann gilt $|x_0| \leq 2|x|$ und

$$|g(x) - a| \ = \ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \ = \ \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| \ \leq \ \frac{2}{x_0^2} \cdot |x_0 - x| \ < \ \frac{2\delta(\varepsilon)}{x_0^2} \ \leq \ \varepsilon.$$

3. $h(x) = \frac{1}{x-1}$, dann gilt $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x-1} = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

Rechenregeln für Grenzwerte

Satz

Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit Grenzwerten*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = b.$$

Dann gilt:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *wenn* $b \neq 0$ *und* $g(x) \neq 0$.

Satz

Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $g : f(D) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ *und* $\lim_{x \to a} g(x) = b$. *Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = b.$$

Stetigkeit

Definition

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0) \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig (in D), falls f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Bemerkung: Stetigkeit von f in x_0 bedeutet, dass Funktionsauswertung und Grenzwertbildung vertauscht werden kann:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad = \quad f(x_0) \quad = \quad f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Rechenregeln: Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Grenzwerte (und Folgen).

Beispiele für stetige Funktionen

1. x auf $\mathbb{R}$
2. Polynom $p(x)$ in x auf $\mathbb{R}$
3. $|x|$ auf $\mathbb{R}$
4. x^a mit $a \in \mathbb{R}$ auf $[0, \infty)$
5. $\exp(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$
6. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auf $\mathbb{R}$
7. Umkehrfunktionen bijektiver, stetiger Funktionen
8. $\log(x)$ auf $(0, \infty)$
9. $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ auf $[-1, 1]$

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$:

$$0 < \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\xrightarrow{x\to\infty} 0} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

B. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{|x|} = 1$:
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{x}{|x|} = 1$, d.h. für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0$ und $x_n > 0$ gilt $\frac{x_n}{|x_n|} = 1$.

C. Die Fälle $\frac{f(x)}{g(x)} \to$ „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$" und $f(x) \cdot g(x) \to$ „$0 \cdot \infty$" werden wir später behandeln können, wenn wir differenzieren können:

Regel von de l'Hospital.

Zwischenwertsatz

Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es zu jedem Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.

„Anwendung“: Existenz von Nullstellen und deren Bestimmung.

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann hat f in (a,b) eine Nullstelle.

Interation: Bisektionsverfahren (Tafel).

Beschränktheit und Min-Max-Prinzip

- stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$

Satz (Beschränktheit)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $M > 0$ mit

$$f(x) \leq M \qquad \text{für alle } x \in [a, b],$$

d.h. f ist beschränkt.

Satz (Min-Max-Prinzip)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein x_* und ein x^* in $[a, b]$ mit

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*),$$

d.h. f nimmt auf $[a, b]$ sein Minimum $f(x_*)$ und sein Maximum $f(x^*)$ an.

- beide Sätze stimmen auch auf $[a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_n, b_n]$ (Übung)

Kapitel 4: Spezielle Funktionen

Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

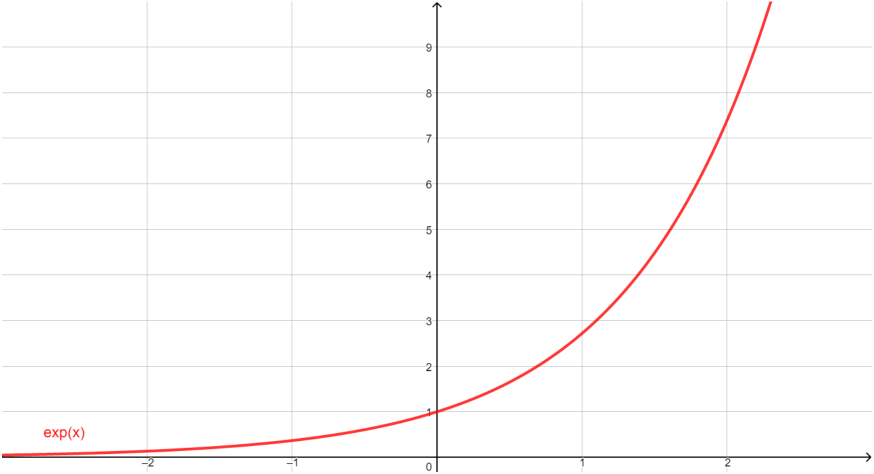
Eigenschaften:

- $\exp(0) = 1$
- Euler-Zahl: $e = \exp(1)$
- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\exp(x)^a = \exp(a \cdot x)$
- streng monoton wachsend: $x < y \quad \Rightarrow \quad \exp(x) < \exp(y)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$

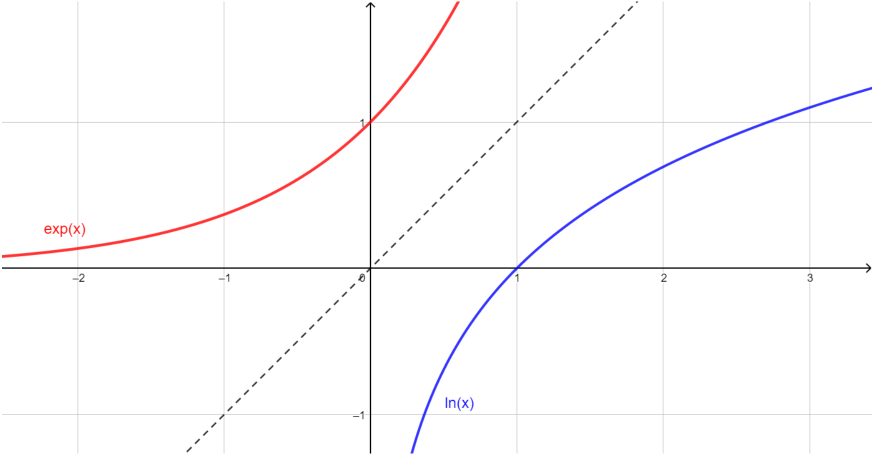
Folgerung:

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty) \text{ ist bijektiv}$$

Graph der Exponentialfunktion



Natürlicher Logarithmus



Natürlicher Logarithmus

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

Eigenschaften:

- verschiedene Schreibweisen: $\log$ (meist für dekadischen Logarithmus)
- $\ln(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp(y)$
- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
- Rechenregeln:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \qquad \ln(x^n) = n \cdot \ln(x), \qquad \ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$$

Allgemeine Potenzen

- $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$:
  - $\exp(n \ln(a)) = \exp(\ln(a^n)) = a^n$
  - $\exp(\frac{1}{n} \ln(a))^n = ... = a$, d.h. $\exp(\frac{1}{n} \ln(a)) = a^{\frac{1}{n}}$
- allgemeine Potenz ($a > 0$, $x \in \mathbb{R}$):

$$a^x := \exp(x \ln(a))$$

- Für $a \in (0,1)$ ist $\mathbb{R} \to (0,\infty),\ x \mapsto a^x$ streng monoton fallen und bijektiv
- Für $a \in (1,\infty)$ ist $\mathbb{R} \to (0,\infty),\ x \mapsto a^x$ streng monoton steigend und bijektiv
- Logarithmus zur Basis $a > 0$, $a \neq 1$: $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$ mit

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

- $\log_e(x) = \ln(x)$
- Umrechnung: $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)} = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad (a, b > 0 \text{ und } a, b \neq 1)$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

- $\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodisch:

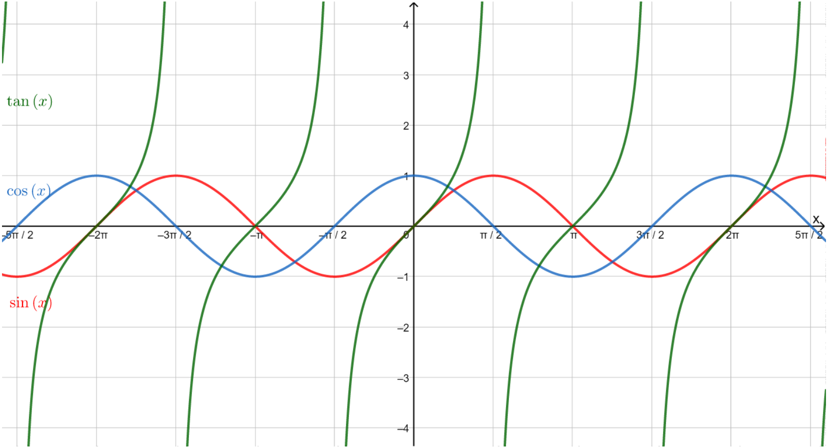
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

- $\sin$- und $\cos$-Vorzeichenwechsel bei π-Addition:

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

- $\tan$ ist π-periodisch:

$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\tan(x)$	0	–	0	–	0

Beziehungen zwischen $\sin$ und $\cos$

- Pythagoras ($x \in \mathbb{R}$):
$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$
- Beispiel: Beschränktheit ($x \in \mathbb{R}$)
$$|\sin(x)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\cos(x)| \leq 1$$
- Beispiel: Nullstellen vs. Min/Max ($x \in \mathbb{R}$)
$$|\sin(x)| = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad |\cos(x)| = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin(x) = 0$$
- Additionstheoreme ($x, y \in \mathbb{R}$):
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
- Beispiel: Vorzeichenwechsel bei π-Addition
$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(x) = -\sin(x)$$
$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x)$$

Additionstheorem für $\tan$

Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ mit $x + y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ gilt:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \tag{$*$}$$

Spezielle Relativitätstheorie:

- „Definiere" eine Addition $\oplus$ auf $(-1, 1)$ ähnlich zu $(*)$:

$$\oplus : (-1,1) \times (-1,1) \to (-1,1), \quad a \oplus b := \frac{a+b}{1 + a \cdot b}$$

- Eigenschaften von $\oplus$: kommutativ ($a \oplus b = b \oplus a$), Inverses ($a \oplus (-a) = 0$), assoziativ ($(a_1 \oplus a_2) \oplus a_3 = a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3) = a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$)
- Beispiel: $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$
- Interpretation: a, b, a_1, a_2, a_3 sind Geschwindigkeiten gemessen in Vielfache der Lichtgeschwindigkeit $c := 299\,792\,458\, m \cdot s^{-1}$. $\oplus$ ist die relativistische Geschwindigkeitsaddition.

Umkehrfunktionen von $\sin$, $\cos$ und $\tan$

- Die Einschränkungen

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

  sind streng monoton steigend und stetig, d.h. sind bijektiv und somit existieren die Umkehrfunktionen

- Umkehrfunktionen sind streng monoton wachsend und stetig:
  - Arcussinus:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

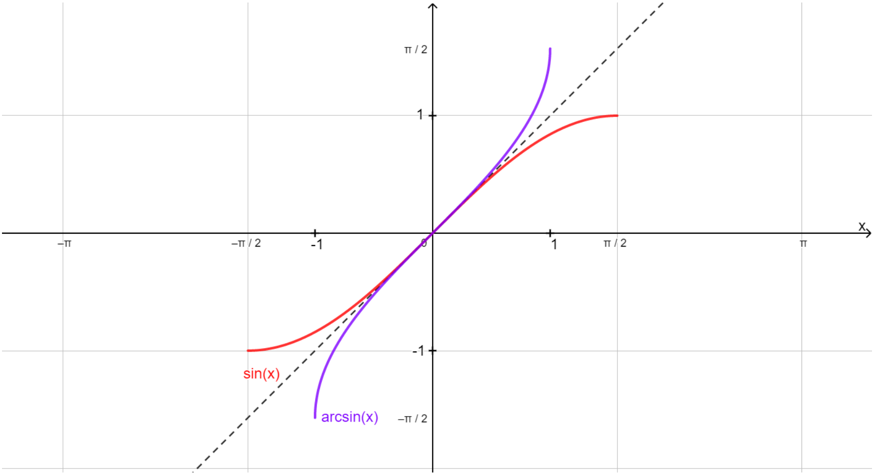
  - Arcuscosinus:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

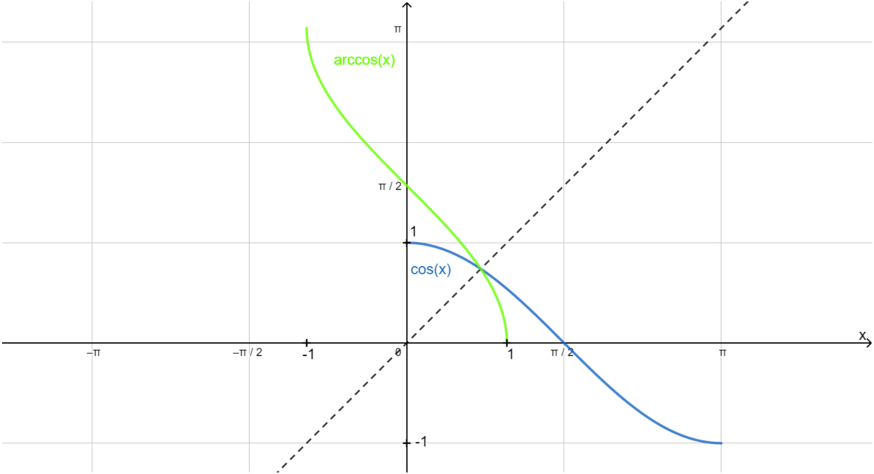
  - Arcustangens:

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

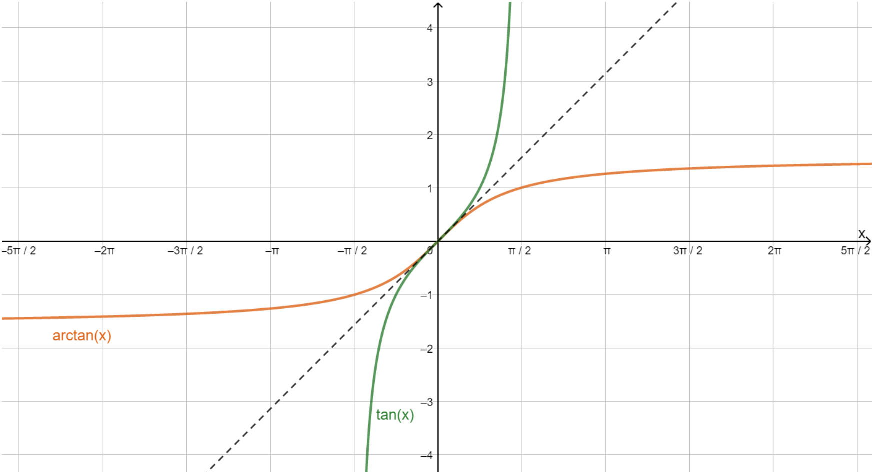
Arcussinus $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Arcuscosinus $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$



Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Kapitel 5: Differentiation

Motivation: Anstieg einer Gerade und Tangenten

- Grade: $y = m \cdot x + c$
  - Anstieg zwischen zwei Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(m \cdot x_1 + c) - (m \cdot x_0 + c)}{x_1 - x_0} = m$$

    (an jeder Stelle gleich)
  - Skizze: Tafel

- Funktion: $y = f(x)$
  - Anstieg zwischen zwei Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

    (hängt i.A. von x_0 und x_0 ab)
  - Frage: Anstieg nahe bzw. an x_0 (d.h. $x_1 \to x_0$)?

Existiert $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \overset{h = x_1 - x_0}{=} \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$?

Definition der ersten Ableitung

Definition

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a, b)$, $a < b$. f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a, b)$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Limes heißt (erste) Ableitung (Differentialquotient) von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet:

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

f heißt differenzierbar (auf (a, b)), wenn $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in (a, b)$ existiert. Ist f' stetig, so heißt f stetig differenzierbar.

Andere Bezeichnungen für $f'(x_0)$: $\dot{f}(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ (sprich: „$\mathrm{d}f$ nach $\mathrm{d}x$“)

Beispiele

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0 \end{aligned}$$

2. $g : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ und $x_0 > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h \cdot (\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

Einseitige Ableitung

Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist rechtsseitig (bzw. linksseitig) differenzierbar in $x_0 \in [a, b)$ (bzw. $x_0 \in (a, b]$), wenn

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Die rechtsseitige (linksseitige) Ableitung wird mit $f'_+(x_0)$ (bzw. $f'_-(x_0)$) bezeichnet.

Bemerkung:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \qquad \Rightarrow \qquad f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

(wie bei Stetigkeit)

Beispiel einseitige Ableitung

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ und $x_0 = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 1 = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -1 = -1$$

Also: $f'_+(0)$ und $f'_-(0)$ existieren, aber $f'(0)$ existiert nicht da $f'_+(0) \neq f'_-(0)$.

2. $g : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ und $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

d.h. $g'_+(0)$ existiert nicht.

Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Satz

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ in } x_0 \in (a,b) \text{ differenzierbar} \quad \Rightarrow \quad f \text{ stetig in } x_0.$$

Beweis:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} + f(x_0) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0). \qquad \square$$

Achtung: Umkehrung gilt nicht, wie wir schon für die Betragsfunktion $|x|$ gesehen haben.

Rechenregeln

Satz

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ *und* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in (a, b)$ *differenzierbar, dann gilt:*

1. *Linearität:* $(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0)$
2. *Produktregel:* $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. *Quotientenregel: Mit* $g'(x_0) \neq 0$ *gilt* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\right)(x_0)$.

Beispiele:

1. $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$ und $x_0 > 0$. Dann gilt $f'(x_0) = 6x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$
2. $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g'(x_0) = \left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)'(x_0) = \left(\frac{(x+1)' \cdot (x^2+4) - (x+1) \cdot (x^2+4)'}{(x^2+4)^2}\right)(x_0)$$

$$= \left(\frac{x^2+4-(x+1) \cdot 2x}{(x^2+4)^2}\right)(x_0) = \left(\frac{-x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\right)(x_0) = \frac{-x_0^2-2x_0+4}{(x_0^2+4)^2}.$$

Satz (Kettenregel)

Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$ und $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $f(x_0) \in (c,d)$. Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beispiel:

$h(x) = \sqrt{x^2+4}$. Mit $f(x) = x^2 + 4$ und $g(y) = \sqrt{y}$ gilt dann

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0^2+4}} \cdot 2x_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+4}}.$$

Differentiation von Reihen

Satz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Folge, so dass die Reihe $r(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ für alle $x \in (a,b)$ absolut konvergent ist. Dann gilt

$$r'(x) \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}.$$

Beispiel:

$\exp(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!}$. Dann gilt

$$\exp(x)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{m=n-1}{=} \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \frac{x^m}{m!} = \exp(x).$$

Extrema

Definition

Wir sagen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ habe an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad (\textit{bzw. } f(x_0) \geq f(x))$$

für alle $x \in (a, b) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Satz

Besitzt $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist f an x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Bemerkungen:

1. Die Aussage gilt nicht auf abgeschlossenen Intervallen.
2. Die Umkehrung der Aussage gilt nicht (z.B.: x^3 auf $(-1, 1)$ bei $x_0 = 0$).

Mittelwertsatz

Satz

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a,b) differenzierbar ist, so gibt es eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) \quad = \quad f'(\xi) \cdot (b-a).$$

Korollar

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar, so gilt:

1. $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a,b)$ *folgt* $f(x) =$ *const. auf* $[a,b]$.
2. *Aus* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a,b)$ *folgt* $f(x)$ *ist monoton steigend.*
3. *Aus* $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in (a,b)$ *folgt* $f(x)$ *ist monoton fallend.*

Ableitung von Umkehrfunktionen

Satz

Sei $f : (a,b) \to (c,d)$ eine stetige bijektive Funktion, die in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$g'(y_0) \quad = \quad \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis: $x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \Rightarrow \qquad 1 = x' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$\Rightarrow \qquad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad \square$$

Beispiel: $(\ln(y))' = y^{-1}$ auf $(0,\infty)$.

Setze $f(x) = \exp(x)$ und $g(y) = \ln(y)$, dann gilt

$$(\ln(y))' \quad = \quad g'(y) \quad = \quad \frac{1}{f'(g(y))} \quad = \quad \frac{1}{\exp(\ln(y))} \quad = \quad \frac{1}{y}.$$

Höhere Ableitungen

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, d.h. $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

existiert, nennen wir $f''(x_0) = (f')'(x_0)$ die zweite Ableitung. Schreiben auch:
$f^{(2)}(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}^2 x}(x_0)$, $D^2 f(x_0)$.
Auf diese Weise definieren wir n-te Ableitungen

$$f^{(n)}(x_0),\ \frac{d^n f}{\mathrm{d}^n x}(x_0),\ D^n f(x_0).$$

Beispiele

1. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow f''(x) = n(n-1) \cdot x^{n-2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow f^{(r)}(x) = n(n-1) \cdots (n-r+1) \cdot x^{n-r}$
2. $g(x) = \sin(x) \Rightarrow g'(x) = \cos(x) \Rightarrow g''(x) = -\sin(x) \Rightarrow g^{(3)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow g^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow \dots$

Regel von de l'Hospital

Satz

Sei $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in (a, b)$ *differenzierbar (oder* $x_0 = \infty, -\infty$*). Falls*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad = \infty$$

gilt und $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(eigentlich oder uneigentlich) existiert, dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiele:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{\ln(x+1)} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{(x+1)^{-1}} = 1.$
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{\exp(x)}{x} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{\exp(x)}{1} = \infty.$

Satz

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in (a, b)$ k*-mal differenzierbar (oder* $x_0 = \infty, -\infty$*),* $k \in \mathbb{N}$. *Falls*

$$\lim_{x\to x_0} f^{(l)}(x) = \lim_{x\to x_0} g^{(l)}(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad = \infty$$

für alle $l = 0, \ldots, k-1$ *gilt und* $\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$ *(un)eigentlich existiert, dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

Beispiele:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}.$$

2. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x\cdot\sin(x)} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x) - x\cdot\cos(x)} \overset{\text{d'H}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\cos(x) - x\cdot\sin(x)} = 0$$

- bisher die Fälle $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$
- Frage: Was ist mit

$$0 \cdot \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad \text{und} \qquad 0^\infty?$$

- Antwort: Umformen.

Beispiele (Tafel):

1. $\lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) =$
2. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^x =$
3. $\lim_{x \to \infty} x^{1/x} =$

Taylor-Polynome: Motivation

- Beobachtung: Für $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent auf $(-r, r)$, $r > 0$.

  Dann gilt
  - $f(0) = a_0$
  - $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$, d.h. $f'(0) = a_1$
  - ...
  - $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot (k-n+1) \cdot x^{k-n}$, d.h. $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

  Also: $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ und

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \tag{$*$}$$

- Frage: Für ein beliebiges $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, gilt dann $(*)$ oder wenigstens

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + R_n(x)$$

  mit einem gewissen (kleinen) Fehler $R_n(x)$?

Definition

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar. Dann ist das n-te Taylorpolynom T_{n,f,x_0} an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ definiert als

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Wir definieren das Restglied R_n als

$$R_n(x - x_0) := f(x) - T_{n,f,x_0}(x).$$

Satz (Lagrangesche Restgliedformel)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal (stetig) differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$. Für $x = x_0 + h \in (a,b)$ gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$R_n(x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Es gibt weitere Restgliedformeln (Cauchys Restgliedformel, Integraldarstellungen).

Lagrangesche Restgliedformel: Beispiele

$$R_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}$ für ein $\vartheta \in (0,1)$
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos(\vartheta x)$ für ein $\vartheta \in (0,1)$
3. $x > -1$ und $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Dann gilt

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots$$

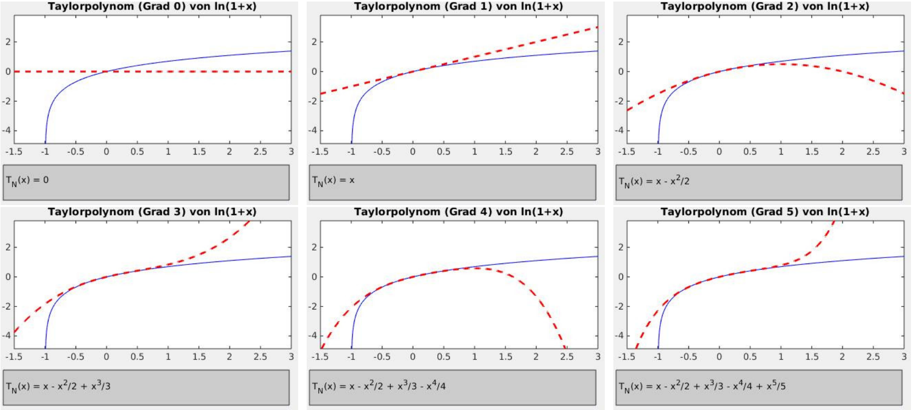
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

d.h. $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x) = \binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}$ und somit

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x).$$

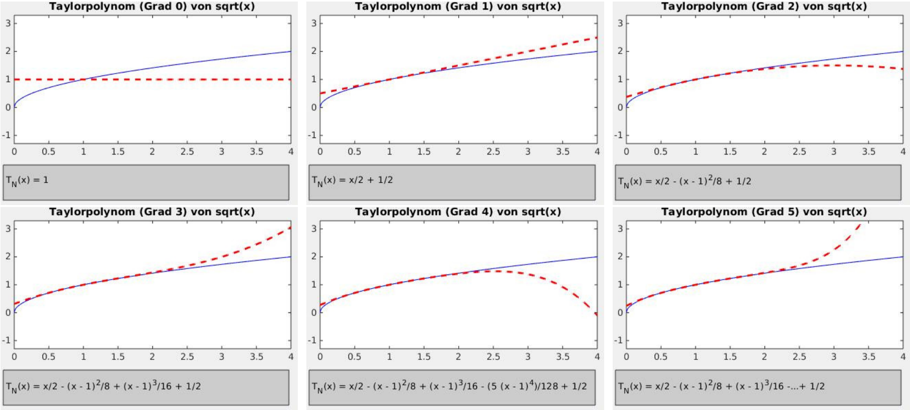
Beispiel: $\ln(1+x)$, $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) = \ln(1+x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = (1+x)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad \dots \\
&\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot (1+x)^{1-n}
\end{aligned}
$$



Beispiel: $\sqrt{x}$, $x_0 = 1$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$\Rightarrow \quad \dots$$
$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2}{2} \cdots \frac{1-2(n-1)}{2} x^{1/2-n}$$



Taylor-Reihen

Definition

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *beliebig oft differenzierbar und* $x_0 \in (a,b)$*. Dann heißt die Reihe*

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (*)$$

die Taylor-Reihe von f *in* x_0*.*

Bemerkung: Es ist möglich, dass $(*)$ nur in $x = x_0$ konvergiert.

Satz

Gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *für* $x \in (a,b)$*, so konvergiert* $(*)$ *in* x*:* $T_{f,x_0}(x) = f(x)$*.*
Gilt dies für alle $x \in (a,b)$*, so gilt* $T_{f,x_0}(x) = f(x)$ *auf* (a,b)*.*

Bemerkungen:

- Es kann sein, dass T_{f,x_0} in $x \in (a,b)$ konvergiert, aber $T_{f,x_0}(x) \neq f(x)$ gilt, weil $R_n(x) \not\to 0$ für $n \to \infty$.
  Beispiel:
  $$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
  Dann gilt $f^{(n)}(x_0 = 0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit
  $$T_{f,0}(x) = 0$$
  aber $f(x)$ nicht die Nullfunktion.

- Ist f durch eine Reihe definiert, so stimmt die Taylor-Reihe mit dieser überein.
  Beispiele: $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, etc.

Kapitel 6: Integration

„Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst."

Motivation: Flächeninhalt

- Flächeninhalt A eines Rechteckes: Höhe mal Breite $\Delta h \cdot \Delta b$
- Flächeninhalt A einer Treppenfunktion $T(x) = h_i$ für $x \in (x_i, x_{i+1}]$ mit $x_1 < x_2 < \cdots < x_{k+1}$ (Skizze Tafel):

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \cdot \Delta x_i \qquad \text{mit} \qquad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

- Approximation der Fläche $A(f)$ einer stetigen Funktion (Skizze Tafel):
  - $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
  - Zerlegung von $[a, b]$: $x_1 = a < x_2 < x_3 < \cdots < x_{k+1} = b$
  - untere Approximation $\underline{A}(f)$ durch Treppenfunktion:

$$\underline{f}(x) := \min_{\substack{y \in [x_i, x_{i+1}] \\ x_i \leq x \leq x_{i+1}}} f(y)$$

  - obere Approximation $\overline{A}(f)$ durch Treppenfunktion:

$$\overline{f}(x) := \max_{\substack{y \in [x_i, x_{i+1}] \\ x_i \leq x \leq x_{i+1}}} f(y)$$

  - $\underline{A}(f) \quad \leq \quad A(f) \quad \leq \quad \overline{A}(f)$

Integration von Treppenfunktionen

Definition

Sei $T : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Treppenfunktion, d.h. es gibt* $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_{k+1} = b$ *und* $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ *mit* $T(x) = t_i$ *für* $x \in [x_i, x_{i+1})$*. Dann definieren wir das Integral von* T *über* $[a,b]$ *durch*

$$\int_a^b T(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \sum_{i=1}^{k} t_i \cdot \Delta x_i$$

mit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Bemerkung: Integral ist von der Zerlegung unabhängig.

Beispiel: Sei $x_1 = 0, x_2 = 1.5, x_3 = 3.5, x_4 = 5$ sowie $t_1 = 1, t_2 = -1, t_3 = 2$. Dann gilt

$$\int_0^5 T(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{3} t_i \cdot \Delta x_i = t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_2) + t_3(x_4 - x_3)$$
$$= 1(1.5 - 0) + (-1)(3.5 - 1.5) + 2(5 - 3.5) = 1.5 - 2 + 2 \cdot 1.5 = 2.5$$

Integration von stetigen Funktionen

Definition

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $\underline{f}_n, \overline{f}_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *Treppenfunktionen mit* $\underline{f}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_n(x)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x \in [a,b]$*. Wenn* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \underline{f}_n(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \overline{f}_n(x)\, \mathrm{d}x$ *gilt und existiert, dann setzen wir*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \underline{f}_n(x)\, \mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \overline{f}_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beispiel (Tafel): $f(x) = x$ auf $[0,1]$. Zerlegung: $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. $\underline{f}_n(x) = x_i$ und $\overline{f}_n(x) = x_{i+1}$ für $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Dann haben wir

$$\int_0^1 \underline{f}_n(x)\, \mathrm{d}x = \text{(Tafel)} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \overline{f}_n(x)\, \mathrm{d}x = \text{(Tafel)}.$$

Und somit existiert $\lim\limits_{n\to\infty}$ in beiden Fällen und ist gleich $\frac{1}{2} = \int_0^1 x\, \mathrm{d}x$.

Hilfe: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rechenregeln für Integrale

Satz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei steige Funktionen. Dann gilt*

1. *Linearität:* $\displaystyle\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + g(x)) \, \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$
2. *Intervallzerlegung ($c \in (a, b)$):* $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x.$
3. *Grenzensymmetrie:* $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x.$
4. *Monotonie:* $f \leq g$ *auf* $[a, b] \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$
5. *Dreiecksungleichung:* $\displaystyle\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$

Bemerkung: Mit (1) können wir Integrale über stückweise stetige Funktionen definieren.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine (stetige) Funktion und* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine (stetig) differenzierbare Funktion.* F *heißt Stammfunktion von* f *wenn* $F' = f$ *gilt.*

Bemerkung: Mit F ist auch $F + c$ eine Stammfunktion. Sind F und G zwei Stammfunktionen zu f, dann gilt $F = G + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $c \in [a, b]$*. Dann wird durch* $F(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *eine Stammfunktion geliefert. Es gilt also* $F'(x) = f(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$*.*

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI))

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion von* f*, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(x)\Big|_{x=a}^{b} \quad = \quad F(b) - F(a).$$

Beispiele HDI (Tafel)

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^4 \,\mathrm{d}x =$

2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(x) \,\mathrm{d}x =$

3. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x =$

4. $\displaystyle\int_{0}^{3} 2x \cdot \exp(x^2) \,\mathrm{d}x =$

Partielle Integration

Idee: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$

Satz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x \quad = \quad f(x) \cdot g(x)\Big|_{x=a}^{b} \quad - \quad \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beispiele (Tafel):

1. $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \sin(x)\, \mathrm{d}x =$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x =$

Substitution

Idee 1: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, dann $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Idee 2: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Satz

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ \mathrm{d}y \quad = \quad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Beispiel: $y = x^3$, d.h. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$, also $x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ \mathrm{d}y$, neue Integrationsgrenzen: $x_1 = 0 \mapsto y_1 = x_1^3 = 0$ und $x_2 = 2 \mapsto y_2 = x_2^3 = 8$:

$$\int_0^2 x^2 \cdot \exp(x^3)\ \mathrm{d}x = \int_{y_1=0}^{y_2=8} \frac{1}{3} \exp(y)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{3}(\exp(8) - \exp(0)) = \frac{1}{3}(\exp(8) - 1).$$

Uneigentliche Integrale

Bisher: Integration von (stückweise) stetigen Funktionen auf $[a, b]$.

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig. Dann existiert* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *und ist endlich.*

Wir wollen nun folgende Abschwächungen bzw. Erweiterungen betrachten:

- f nicht stetig bzw. beschränkt auf $[a, b]$, z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[-1, 1]$
  - offene Intervalle $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b)
  - nicht stetig, z.B. Singularitäten
- unbeschränkte Intervalle
  - $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, \infty)$

Integration auf $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$

Definition

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und für jedes $R > a$ sei die Einschränkung $f|_{[a,R]} : [a, R] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wenn $\int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$ für $R \to \infty$ existiert, dann ist f auf $[a, \infty)$ im uneigentlichen Sinne integrierbar und wir schreiben

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiele:

1. $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt $\int_1^R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)\big|_{x=1}^R = \ln(R)$. Da $\int_1^R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(R) \to \infty$ für $R \to \infty$ ist f auf $[1, \infty)$ nicht uneigentlich integrierbar.
2. $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Dann gilt $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{x}\big|_{x=1}^R = 1 - R^{-1}$. Da $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - R^{-1} \to 1$ für $R \to \infty$ ist g auf $[1, \infty)$ im uneigentlichen Sinne integrierbar und es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{R\to\infty} 1 - R^{-1} \quad = \quad 1.$$

Äquivalente Definition für $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für ein $c \in \mathbb{R}$ existieren die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \textit{und} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)$$

im uneigentlichen Sinne, dann existiert und gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad + \quad \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integralvergleichskriterium für Reihen

Satz

Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *monoton fallend. Es gilt:*

$$\int_1^\infty f(x)\, \mathrm{d}x \text{ existiert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert.}$$

Beispiel:
Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \le 0$. Es gilt

$$\int_1^\infty x^\alpha\, \mathrm{d}x \text{ exisistiert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^\infty n^\alpha \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < -1.$$

Majoranten-Kriterium für Integrale

Satz

Seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *zwei Funktionen. Wenn*

$$|f(x)| \leq g(x) \qquad \text{für alle} \qquad x \in [a, \infty)$$

gilt und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ *existiert, so existiert auch*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel:

(Tafel)

Integration auf $[a, b)$ und $(a, b]$

Definition

Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. f heißt über $(a, b]$ integrierbar im uneigentlichen Sinne wenn

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \quad := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

existiert. Äquivalente Definition gilt auf $[a, b)$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ auf $(0, 1]$. Dann gilt

$$\int_0^1 x^{-1/2}\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2x^{1/2}\Big|_{x=\varepsilon}^1 = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} 2 - 2\varepsilon^{1/2} = 2.$$

Numerische Integration

Problem:

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lässt sich oft nicht exakt bestimmen.

Idee:

- Approximiere f, z.B. mit Polynom P, und integriere dies:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \approx \quad \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ersetze Integration durch (endlich viele) gewichtete Punktauswertungen:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f(x_i).$$

Mittelpunktregel

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und setze*

$$M(f,a,b) \quad := \quad f\left(\frac{b+a}{2}\right)(b-a).$$

Wenn f *zweimal stetig differenzierbar ist und* $C \geq 0$ *mit* $|f''(x)| \leq C$ *auf* $[a,b]$*, dann gilt der Fehler*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - M(f,a,b) \right| \quad \leq \quad \frac{(b-a)^3}{24} C.$$

Verbesserung: Teile $[a,b]$ in n gleichgroße Teilintervalle und wende auf jedem Teilintervall die Mittelpunktregel an. Fehler:

$$|\ldots| \quad \leq \quad \frac{(b-a)^3}{24n^2} C.$$

Trapezregel

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und setze*

$$T(f, a, b) \quad := \quad \frac{f(b) + f(a)}{2}(b - a).$$

Wenn f *zweimal stetig differenzierbar ist und* $C \geq 0$ *mit* $|f''(x)| \leq C$ *auf* $[a, b]$*, dann gilt der Fehler*

$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - T(f, a, b) \right| \quad \leq \quad \frac{(b - a)^3}{12} C.$$

Verbesserung: Teile $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle und wende auf jedem Teilintervall die Trapezregel an. Fehler:

$$|\ldots| \quad \leq \quad \frac{(b - a)^3}{12n^2} C.$$

Simpsonregel

Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und setze*

$$S(f, a, b) \quad := \quad \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right).$$

Wenn f *viermal stetig differenzierbar ist und* $C \geq 0$ *mit* $|f^{(4)}(x)| \leq C$ *auf* $[a, b]$, *dann gilt der Fehler*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f, a, b)\right| \quad \leq \quad \frac{(b-a)^5}{180} C.$$

Verbesserung: Teile $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle und wende auf jedem Teilintervall die Simpsonregel an. Fehler:

$$|\ldots| \quad \leq \quad \frac{(b-a)^5}{180 n^4} C.$$

Gaußintegration

Satz (Richter 1957)

Seien $f_0, \ldots, f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *integrierbare Funktionen und* $w(x) \geq 0$ *eine Gewichtsfunktion. Dann gibt es ein* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \leq n+1$, $x_1, \ldots, x_k \in I$ *und* $c_1, \ldots, c_k > 0$ *so dass*

$$\int_I f(x) \cdot w(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f(x_i)$$

für alle $f = \alpha_0 f_0 + \cdots + \alpha_n f_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. *Sind* $f_0, \ldots, f_n$ *Polynome vom Grad höchstens* n, *dann gilt sogar* $k \leq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ *(*$\lceil q \rceil = q$ *aufgerundet).*

- $w(x) = 1$ auf $[-1, 1]$: Gauß-Legendre-Integration
- $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $[-1, 1]$: Gauß-Chebyshev-Integration
- $w(x) = e^{-x^2}$ auf $(-\infty, \infty)$: Gauß-Hermite-Integration
- $w(x) = e^{-x}$ auf $[0, \infty)$: Gauß-Laguerre-Integration

Kapitel 7: Gewöhnliche Differentialgleichungen

„Wenn Differenzieren Handwerk ist und Integrieren Kunst, dann ist das Lösen von Differentialgleichungen Magie.“

Motivation: Bakterienwachstum und radioaktiver Zerfall

- $N(t)$ Anzahl der Bakterien zur Zeit t
- Annahme: Änderung $\Delta N(t)$ der Bakterienanzahl ist proportional zur Anzahl der Bakterien und der Zeitänderung Δt:

$$\Delta N(t) \approx \alpha N(t) \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \approx \alpha N(t)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t) = \alpha N(t) \quad (*)$$

- Lösung durch hinschauen: $N(t) = N(0) \cdot \exp(\alpha t)$ löst $(*)$. Einsetzen:

$$N'(t) = (N(0) \cdot \exp(\alpha t))' = N(0) \cdot \alpha \exp(\alpha t) = \alpha N(t)$$

- $(*)$ beschreibt mehr:
  - $\alpha > 0$: (exponentielles) Wachstum (von Bakterien u.a. Lebewesen, Zinseszins, etc.)
  - $\alpha < 0$: (exponentieller) Zerfall (von radioaktiven Elementen, Inflation, etc.)

Fazit:

- Die Funktion $N(t)$ erfüllt die Gleichung
$$N'(t) = \alpha N(t) \qquad \text{bzw.} \qquad 0 = \alpha N(t) - N'(t). \tag{$*$}$$
- $(*)$ ist eine Gleichung in der Unbekannten $N(t)$

Fragen:

- Existenz: Wann haben Gleichungen der Art $(*)$ oder kompliziertere Gleichungen eine Lösung?
- Eindeutigkeit: Wenn $(*)$ eine Lösung hat, dann wie viele?
- Beschreibung der Lösung: Wie sieht die Lösung aus? Wie kann sie angegeben werden, z.B. in einer Formel?

Definition Gewöhnliche Differentialgleichung

Definition

Sei F eine Funktion in $n+2$ reellen Veränderlichen, $n \in \mathbb{N}_0$. Eine gewöhnliche Differentialgleichung (GDL) der Ordnung n ist eine Gleichung der Gestalt

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{$*$}$$

Die Funktion $y(x)$ wird eine Lösung (oder Integral) von $(*)$ auf dem Intervall I genannt, wenn $y(x)$ n-mal stetig differenzierbar ist und

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

für alle $x \in I$ gilt. Der Graph von einer Lösung $y(x)$ wird Lösungs- oder Integralkurve genannt. Anfangswertproblem (AWP): x_0, $y_0 = y(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ sind für die Lösung $y(x)$ vorgegeben.

Beispiele:

1. $N'(t) = \alpha N(t) \quad \Rightarrow \quad F(x_0, x_1) = \alpha x_0 - x_1$: GDL 1. Ordnung
2. $P'' = aP + bP^2 \quad \Rightarrow \quad F(x_0, x_1) = ax_0 + bx_0^2 - x_1$: GDL 2. Ordnung

Homogene lineare GDL 1. Ordnung

Homogene lineare GDL 1. Ordnung:

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) \qquad \text{bzw.} \qquad 0 = a(x)y(x) - y'(x) \tag{$*$}$$

- linear: y, y' (y'' etc.) kommen nur in 1. Potenz und ohne Produkte zwischen einander vor (z.B. $y \cdot y'$ etc.). Allgemein:

$$0 = a_0(x) + a_1(x) \cdot y(x) + a_2(x) \cdot y'(x) + \cdots + a_n(x) \cdot y^{(n)}(x) \tag{$**$}$$

- homogen: $a_0(x) = 0$ in $(**)$

Satz

Sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat die homogene lineare GDL 1. Ordnung $(*)$ mit den Anfangswerten x_0 und $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung und diese ist

$$y(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t\right).$$

Beispiel einer hom. lin. GDL 1. Ordnung mit AWP

Bakterienwachstum ($\alpha > 0$) mit AWP $t_0 = 0$ und $N_0 = N(0)$:

$$N'(t) = \alpha N(t)$$

Lösung (nun berechnet, nicht geraten oder gesehen):

$$N(t) = N_0 \cdot \exp\left(\int_0^t \alpha \ \mathrm{d}x\right) = N_0 \cdot \exp(\alpha \cdot (t-0)) = N_0 \cdot \exp(\alpha \cdot t)$$

E-Kolibakterien: Verdoppelung aller 20 min. Wie groß ist α?

$$2 = \frac{N(t + 20\,\mathrm{min})}{N(t)} = \frac{N_0 \exp(\alpha(t + 20 \ \mathrm{min}))}{N_0 \exp(\alpha t)} = \exp(\alpha \cdot 20 \ \mathrm{min})$$

$$\Rightarrow \quad \ln(2) = \alpha \cdot 20 \ \mathrm{min} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = \frac{\ln(2)}{20}\,\mathrm{min}^{-1}}}$$

Inhomogene lineare GDL 1. Ordnung

Inhomogene lineare GDL 1. Ordnung:

$$y'(x) = b(x) + a(x) \cdot y(x) \qquad \text{bzw.} \qquad 0 = b(x) + a(x)y(x) - y'(x) \qquad (*)$$

Satz

Seien $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann hat die inhomogene lineare GDL 1. Ordnung $(*)$ mit den Anfangswerten x_0 und $y(x_0) = y_0$ genau eine Lösung und diese ist

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\ \mathrm{d}t\right) \cdot \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)\ \mathrm{d}s\right) \cdot b(t)\ \mathrm{d}t\right).$$

Separierte GDL 1. Ordnung

Separierte GDL 1. Ordnung:

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x)) \tag{$*$}$$

- separiert: $(*)$ kann zu $\frac{y'}{b(y)} = a(x)$ umgeschrieben werden (linke Seite hängt nur von y und die rechte nur von x ab, d.h. x und y sind separiert)

Satz

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $a : I \to \mathbb{R}$ und $b : J \to \mathbb{R}$ stetig mit $b(s) \neq 0$ für alle $s \in J$. Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$. Setze

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t \qquad \textit{und} \qquad B(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{b(s)}\, \mathrm{d}s.$$

Dann hat das AWP von $(*)$ mit $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ die eindeutige Lösung

$$y(x) = B^{-1}(A(x)) \qquad \textit{auf } I.$$

Kapitel 8: Funktionen in mehreren Variablen

Funktionen in mehreren Variablen

- $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$
- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad n = 2$: $(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad n = 3$: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Beispiele:

- ideales Gas: $p = p(V, T) = \dfrac{R \cdot V}{T}$
  - Temperatur $T \in (0, \infty)$
  - Volumen $V \in [0, \infty)$
  - allgemeine Gaskonstante R
- Abstandsnorm: $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

Allgemein:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Strömung (an jedem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ hat die Flüssigkeit/das Gas/etc. eine Flussrichtung $(v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$))

Folgen und Konvergenz

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = \big((x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und jede Folge ist von dieser Form. Wir sagen eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, in Zeichen

$$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x \quad \textit{oder} \quad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x,$$

wenn $x^{(k)}$ in jeder Koordinate (Komponente) konvergiert: $x_i^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel: $x^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{k^2-1}{k^2+1} \\ \sin(1-k^{-1}) \\ (1+k^{-1})^k \end{pmatrix} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(1) \\ e \end{pmatrix}$

Stetigkeit

Definition

Sei $n, m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. f heißt stetig in $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$\lim_{x \to c} f(x) \quad = \quad f(c) \quad = \quad f\left(\lim_{x \to c} x\right),$$

d.h. wenn für jede Folge $x^{(k)} \to c$ gilt $f_i(x^{(k)}) \to c_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

Satz

$f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig genau dann wenn alle $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 + yz - 7 \\ \sin(x + y^2 - z) \\ \frac{x^2+4}{x^2y^2+1} \end{pmatrix}$$

Richtungsableitungen und Partielle Ableitungen

Definition

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in U$ und $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$. Die Richtungsableitung von f an x in Richtung a, wenn er existiert, ist

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + at) - f(x)}{t}$$

Für $a = e_i$ der i-the Standardeinheitsvektor, $i = 1, \ldots, n$, haben wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = (\partial_i f)(x) = (D_i f)(x).$$

f heißt einmal stetig differenzierbar, wenn alle $\partial_i f$ existieren und stetig sind.

Äquivalent: Höhere Ableitungen $\partial_i^2 f$, $\partial_i \partial_j f$, etc.

Beispiel: (Tafel)

Satz von Schwarz

Satz

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\partial_i \partial_j f \quad = \quad \partial_j \partial_i f$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Beispiel: (Tafel)

Spezielle Differentialoperatoren I

1. $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Gradient bzw. Nabla-Operator

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix} = \nabla f \quad \text{mit} \quad \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}.$$

   Interpretation: Wird f als Höhenfunktion interpretiert, so ist $\operatorname{grad} f = \nabla f$ die Richtung des steilsten Anstieges.

   Minima/Maxima: $\operatorname{grad} f = 0$ notwendig.

2. $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jacobimatrix

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_n f_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \partial_2 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$

Minima und Maxima

Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Wir definieren die Hessematrix

$$\mathrm{Hess}(f) := \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \partial_1\partial_2 f & \dots & \partial_1\partial_n f \\ \partial_1\partial_2 f & \partial_2\partial_2 f & \dots & \partial_2\partial_n f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \partial_1\partial_n f & \partial_2\partial_n f & \dots & \partial_n\partial_n f \end{pmatrix}.$$

Satz

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. f hat an x_{ex} ein Extrempunkt (Minima oder Maxima) genau dann wenn $\operatorname{grad} f(x_{\text{ex}}) = 0$ und $\mathrm{Hess} f(x_{\text{ex}})$ hat nur positive (Minima) oder negative (Maxima) Eigenwerte.

Bemerkung: Hat $\mathrm{Hess} f(x_{\text{ex}})$ negative und positive Eigenwerte, so ist x_{ex} ein Sattelpunkt.

Kettenregel II

Satz

Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a, b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann ist die Funktion $f \circ \varphi$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi(t)) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(\varphi(t)) \cdot \varphi_i'(t) \quad = \quad \langle (\operatorname{grad} f)(\varphi(x)), \varphi' \rangle.$$

Beispiel: (Tafel)

Bemerkung: Für die Kurve $\varphi(t) = x + t \cdot a$ mit festem $a \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x) \quad = \quad \langle (\operatorname{grad} f)(\varphi(x)), a \rangle \quad = \quad a_1 \partial_1 f(x) + \cdots + a_n \partial_n f(x),$$

d.h. jede Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}$ lässt sich aus dem partiellen Ableitungen $\partial_i f$ berechnen.

Kettenregel III

Satz

Seien $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *und* $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^p \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$(D(f \circ \varphi))(x) \quad = \quad (Df)(\varphi(x)) \cdot (D\varphi)(x).$$

Integration auf $\mathbb{R}^n$

Satz

Sei $G = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ *ein* n*-dimensionales Rechteck und* $f : G \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt:*

$$\int_G f(x)\ \mathrm{d}^n x := \int_{x_1=a_1}^{b_1} \cdots \int_{x_n=a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\ \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1,$$

wobei die Reihenfolge der Integration $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *beliebig gewählt werden kann.*

Beispiel:

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} x^3 y^2 z\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \ldots$$

Bogenlänge

- Frage: Welche Länge L hat eine Kurve $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$? Dabei ist φ stetig.
- Es gibt Kurven $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, die keine endliche Länge besitzen!

Satz

Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine einmal stetig differenzierbare Kurve, dann ist die Länge $L(\varphi)$ der Kurve φ gegeben durch

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

- Interpretiere dabei $\varphi'(t)$ als Geschwindigkeitsvektor und $\sqrt{\varphi'(t)^2} = \|\varphi'(t)\|$ als Geschwindigkeitsbetrag: Weg $=$ Integral von Geschwindigkeit über Zeit

Beispiel: Schraubenkurve $\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (R\cos(t), R\sin(t), ht)$. Damit gilt $\varphi'(t) = (R\sin(t), -R\cos(t), h)$ und

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin(t)^2 + R^2\cos(t)^2 + h^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}.$$

Wegintegrale I

- Frage: Ein Schwimmer bewegt sich entlang einer Bahn $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ in einem Fluss mit der Strömung $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wie viel Energie muss er aufwenden um von $\varphi(a)$ nach $\varphi(b)$ zu schwimmen?
- Ein parametrisierter Weg $\varphi : [a,b]\mathbb{R}^n$ heißt regulär, wenn $\|\varphi'(t)\| \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.
- Antwort für Schwimmer: Am Punkt $\varphi(t)$ schwimmt der Schwimmer in Richtung $\varphi'(t)$ mit Geschwindigkeit $\|\varphi'(x)\|$ und gegen die Strömung $v(\varphi(t))$. Er spürt also die Kraft proportional zu $\langle v(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle$.

Definition

Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine einmal stetig differenzierbare Kurve und $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann definieren wir das Wegintegral $W(\varphi)$ als

$$W(\varphi) := \int_a^b \langle v(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \, \mathrm{d}t.$$

Spezielle Differentialoperatoren II

1. $f = (f_1, \ldots, f_n) : U\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Divergenz

$$\operatorname{div} f \quad := \quad \nabla \cdot f \quad = \quad \partial_1 f_1 + \cdots + \partial_n f_n.$$

Interpretation: $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ist ein Vektorfeld (jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ wird eine Richtung $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet, für $n = 3$ z.B. Strömung). $\operatorname{div} f(x)$ gibt dabei an, ob die Vektoren auseinander/zusammen strömen (Quellen). $\operatorname{div} f = 0$ bedeutet quellfrei.

2. $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Rotation

$$\operatorname{rot} f \quad := \quad \nabla \times f \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Interpretation: $\operatorname{rot} f(x) \in \mathbb{R}^3$ gibt die Richtung an, um der sich das Vektorfeld dreht (Drehachse). Der Betrag $|\operatorname{rot} f(x)|$ gibt die Stärke der Drehung an.

Helmholtz-Theorem

Satz (Helmholtz-Theorem)

Sei $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweifach stetiges Vektorfeld welches für große Abstände hinreichend schnell gegen null geht. Dann lässt sich f eindeutig als Summe

$$f \quad = \quad f_d \quad + \quad f_r$$

in einen divergenzfreien Teil f_d ($\operatorname{div} f_d = 0$) und einen rotationsfreien Teil f_r ($\operatorname{rot} f_r = 0$) zerlegen. Dabei gibt es auch $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_d = \operatorname{rot} A \qquad \textit{und} \qquad f_r = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Satz (Integrabilitätskriterium)

Sei $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ *für alle* $i, j = 1, \ldots, n$. *($n = 3$: $\operatorname{rot} f = 0$)*
2. *Es gibt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f = \operatorname{grad} \varphi$.*

Wegintegrale II

Definition

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein einmal stetig differenzierbarer Weg. Wenn das Wegintegral

$$W(\varphi) = \int_a^b \langle v(\varphi(t)), \varphi'(x) \rangle \, \mathrm{d}t$$

nur von den An- und Endpunkten $A = \varphi(a)$ und $B = \varphi(b)$ abhängt, dann heißt W wegunabhängig.

Satz

Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Es sind äquivalent:

1. *W ist wegunabhängig.*
2. *Jeder geschlossene Weg φ (An- und Endpunkte sind gleich: $A = B$) hat Wegintegral gleich null: $W(\varphi) = 0$.*
3. *(Integrabilitätsbedingung) Es gilt $\partial_i v_j = \partial_j v_i$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.*
4. *(Potential) Es gibt ein $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $v = \operatorname{grad} \Theta$.*

Kapitel 9: ausgewählte Anwendungen

Systeme von GDLs: Reaktionsdynamik

- Reaktion (chemisch, Kernzerfälle, etc.): $A \xrightarrow{k_1} I \xrightarrow{k_2} B$
- Geschwindigkeitsgleichungen (System von GDLs):

$$
\begin{aligned}
N_A'(t) &= -k_1 N_A(t), & N_A(0) &= n_A \\
N_T'(t) &= k_1 N_A(t) - k_2 N_I(t), & N_I(0) &= 0, \\
N_B'(t) &= k_2 N_I(t), & N_B(0) &= 0
\end{aligned}
$$

- Verbindung A:

$$N_A(t) = n_A \cdot \exp(-k_1 \cdot t)$$

- Verbindung I ($k_1 \neq k_2$):

$$N_I(t) = \frac{n_A \cdot k_1}{k_2 - k_1} \left(\exp(-k_1 t) - \exp(-k_2 t)\right)$$

- Verbindung B:

$$N_B(t) = n_A - N_A(t) - N_B(t)$$

- Zeitverlauf: (Skizze an Tafel)

Totales Differential

- Kettenregel II (Ableitung entlang einer Kurve):

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \varphi)}{\mathrm{d}t} \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} \quad + \quad \dots \quad + \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\mathrm{d}t}$$

- $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sind Koordinaten der Kurve, also $x_1 = \varphi_1, \dots, x_n = \varphi_n$, welche in f eingesetzt werden
- Mit formalen Ausdrücken[1] $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x_i$ ergibt sich das totale Differential

$$\mathrm{d}f \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \mathrm{d}x_1 \quad + \quad \dots \quad + \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \mathrm{d}x_n$$

- Beispiel: ideales Gas $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$; allgemein: $p(T, V)$ und

$$\mathrm{d}p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \cdot \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \cdot \mathrm{d}V$$

[1] in der Mathematik als 1-Formen aufgefasst

Zustandsfunktionen

- Seien $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen. $f_1, \ldots, f_n$ gehören zu einer Zustandsfunktion f, wenn sie die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ erfüllen.
- Für eine Zustandsfunktion f gilt dann $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.
- Wärme W und Arbeit Q sind keine Zustandsfunktionen, die Änderungen sind wegabhängig. Daher werden diese Änderungen mit δW und δQ bezeichnet um die wegabhängigkeit zu unterstreichen.
- Die innere Energie U deren Änderung sich als Summe von Arbeit und Wärme(änderung) definiert ist wegunabhängig. Daher schreiben wir $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$.
- Die Änderung $\frac{\delta Q_{rev}}{T}$ stellt sich in der Thermodynamik ebenfalls als wegunabhängig herraus. Damit wird die Entropie S beschrieben: $\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$.
- Da die Arbeit $\delta W = -p \, \mathrm{d}V$ ist und $\delta Q_{rev} = T \, \mathrm{d}S$ gilt

$$\mathrm{d}U = T \, \mathrm{d}S - p \, \mathrm{d}V = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \mathrm{d}S + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \mathrm{d}V.$$

- Da die innere Energie U und die Entropie Zustandsfunktionen sind, d.h. nur vom Zustand des Systems abhängen, so ist auch die freie Energie F (Helmoltz Energie A)
$$A \equiv F \quad := \quad U - TS$$
eine Zustandsfunktion mit: $\mathrm{d}F := \mathrm{d}U - T\ \mathrm{d}S - S\ \mathrm{d}T = -S\ \mathrm{d}T - p\ \mathrm{d}V$.
- Da Druck p und Volumen V eine Zustandsfunktion sind, ist somit auch die Enthalpie $H := U + pV$ eine Zustandsfunktion mit $\mathrm{d}H = T\ \mathrm{d}S + V\ \mathrm{d}p$.
- Da U, H, F, T, S, p und V Zustandsfunktionen sind, so ist auch die Gibbs Energie G eine Zustandsfunktion: $G := H - TS = F + pV = U - TS + pV$, d.h.
$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}U - T\ \mathrm{d}S - S\ \mathrm{d}T + p\ \mathrm{d}V + V\mathrm{d}p$$
und mit $\mathrm{d}U = T\ \mathrm{d}S - p\ \mathrm{d}V$ folgt
$$\mathrm{d}G = -S\ \mathrm{d}T + V\ \mathrm{d}p = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p\ \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T\ \mathrm{d}p,$$
d.h. $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S$ und $\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$.

Maxwell Relationen

Da U, H, F und G zweimal stetig differenzierbar sind folgend aus der totalen Ableitung und dem Satz von Schwarz die folgenden (Maxwell) Relationen:

- $\mathrm{d}U = T\ \mathrm{d}S - p\ \mathrm{d}V$, d.h. U ist Funktion von S und V $(U = U(S,V))$ mit
$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V, \qquad p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V.$$
- $F = F(T,V)$ mit $\mathrm{d}F = -S\ \mathrm{d}T - p\ \mathrm{d}V$:
$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \qquad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$
- $H = H(S,p)$ mit $\mathrm{d}H = T\ \mathrm{d}S + V\ \mathrm{d}p$:
$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, \qquad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p.$$
- $G = G(T,p)$ mit $\mathrm{d}G = -S\ \mathrm{d}T + V\ \mathrm{d}p$:
$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p, \qquad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Literaturempfehlung

- S. Hildebrandt: *Analysis 1*, Springer-Verlag
- H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch*, Vieweg+Teubner
- G. Fischer: *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*, Vieweg