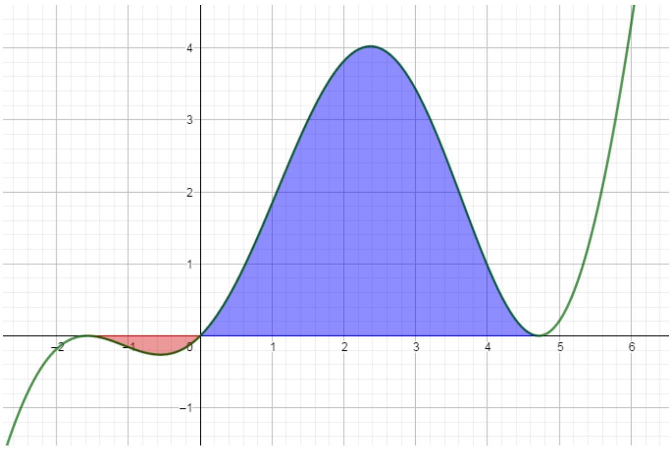
Tutorien-/Selbstübungsblatt 5

Differenzieren ist Technik.
Integrieren ist Kunst.

5.1 Integration

Das Ziel ist es (anschaulich betrachtet), denn Flächeninhalt unter einer Funktion (hier grün) zu bestimmen:



Wir haben also eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben und wollen wie hier im Bild z.B. den Flächeninhalt unter der Funktion von 0 bis $\frac{3\pi}{2}$ bestimmen (hier blau). Oder im Intervall von $-\frac{\pi}{2}$ bis 0, hier rot dargestellt.

Wir stellen dabei schon jetzt fest:

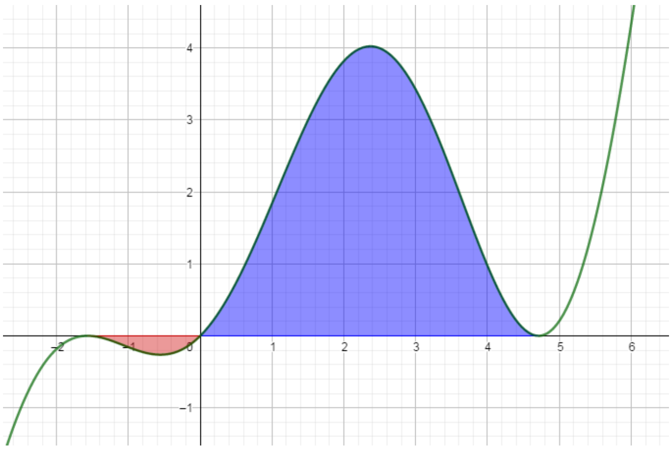
- Das Integral (die Fläche) hat ein Vorzeichen:
  - Jede Fläche über der x-Achse wird positiv gerechnet.
  - Jede Fläche unter der x-Achse wird negativ gerechnet.
- Die Fläche kann man approximativ bestimmen indem man die Kästchen unter der Funktion zählt:
  - Je kleiner man die Kästchen wählt, desto genauer wird die Fläche angenähert.
  - Wir brauchen nicht unbedingt die Kästchen zählen, da übereinanderliegende (gestapelte) Kästchen ein schmales Rechteck bilden. Es reicht daher das Intervall in schmale Rechtecke zu zerlegen (i.a. von unterschiedlicher Breite) und die Fläche der Rechtecke zu summieren.
  - Wenn die Funktion "gut" ist, z.B. stetig, dann nähern wir uns dem wahren Flächeninhalt immer genauer an, wenn wir die Rechtecke schmaler und schmaler wählen.
  - Ein Rechteck der Breite 0 hat keine Fläche. Wir können also die Funktion auf endlich vielen Punkten abändern (oder einfach gleich ignorieren!).

5.1.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wie schon in der Vorlesung gesehen haben ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung von zentraler Bedeutung und seine Wichtigkeit kann nicht überbewertet werden.[1] Wir wissen jetzt (zumindest) ungefähr, was wir unter einem Integral

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

verstehen und können uns dies bildlich vorstellen. Es ist die (signierte) Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse:



Die Integration stellt eine komplett neue Rechenoperation dar. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $a \in \mathbb{R}$ fest, z.B. $a = 0$.[2] Schauen wir uns dann mal die folgende Funktion an:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Als erstes, wir haben die Integrationsvariable, d.h. die Variable im Integral nun mal t genannt, damit wir x als Variable für F nehmen können, d.h. als obere Integrationsschranke. Wie bei der Summation $\sum_i a_i = \sum_j a_j = \dots$ ist der Name der Variable unter dem Integral egal. Wichtig ist nur wie bei der Summation die Werte, die durchlaufen werden.

Das $F(x)$ stellt nun eine komplett neue Funktion dar. Im allgemeinen können wir F nicht durch uns schon bekannt Funktionen ausdrücken. Es gibt z.B. keine (uns schon bekannte) Funktion $F(x)$ mit

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Dieses F können wir nicht durch Funktionen wie e^x, $\sin x$ etc. darstellen.

$F(x)$ ist also als Integral definiert. Wir können F mit anderen Funktionen addieren, mit Faktoren multiplizieren, etc. Langweilig. Was passiert aber, wenn wir F ableiten wollen? Was können wir über $F'(x)$ lernen? Wir haben die Differentiation einer Funktion definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

[1] Ja, immer wenn ich den behandle geht mir das Herz auf.
[2] Das kann man auch allgemeiner machen, aber halten wir es erstmal einfach.

Was passiert nun also, wenn wir $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ haben? Setzen wir einfach mal ein:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass

$$\int_a^{\color{red}b} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{\color{red}b}^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$$

gilt. Wir können also Integrale "zusammenkleben". Wenn wir f erst von a bis b integrieren und dazu noch addieren das Integral von b bis c, dann können wir durch die Summation auch gleich von a bis c integrieren.

Was passiert nun aber in

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t$$

wenn $h \to 0$ geht? Da $h \to 0$ geht, also sehr sehr klein wird, können wir das Integral auch einfach abschätzen. Auf $[x, x+h]$ ist f ja stetig, d.h. das Minimum $\min_{s\in[x,x+h]} f(s)$ und das Maximum $\max_{s\in[x,x+h]} f(s)$ werden nicht nur angenommen, sondern sind auch endlich. Wir können auf $[x, x+h]$ also $f(t)$ von oben und unten abschätzen durch Treppenfunktionen, die nur eine Stufe besitzen:

$$\min_{s\in[x,x+h]} f(s) \le f(t) \le \max_{s\in[x,x+h]} f(s) \qquad \text{für alle } s \in [x, x+h]. \tag{5.1}$$

Da nun f aber stetig ist[3] können wir $h \to 0$ gehen lassen und wir bekommen mit der Polizistenregel:

$$\begin{array}{ccccc} \min_{s\in[x,x+h]} f(s) & \le & f(t) & \le & \max_{s\in[x,x+h]} f(s) \\ \downarrow {\scriptstyle h\to 0} & & & & \downarrow {\scriptstyle h\to 0} \\ f(x) & & & & f(x) \\ & & \downarrow {\scriptstyle h\to 0} & & \\ & & f(x) & & \end{array} \tag{5.2}$$

Integrieren wir nun das nun mal (5.1), dann bekommen wir

$$\underbrace{\int_x^{x+h} \min_{s\in[x,x+h]} f(s)\ \mathrm{d}t}_{=h\cdot\min_{s\in[x,x+h]} f(s)} \quad\le\quad \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t \quad\le\quad \underbrace{\int_x^{x+h} \max_{s\in[x,x+h]} f(s)\ \mathrm{d}t}_{=h\cdot\max_{s\in[x,x+h]} f(s)}.$$

Nehmen wir dies nun zur Abschätzung von $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t$ heran, bekommen wir:

$$\min_{s\in[x,x+h]} f(s) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t \le \max_{s\in[x,x+h]} f(s)$$

[3]Hier brauchen wir, dass f stetig ist. Ansonsten müssen wir ein ganzes Stück rumzirkel. Das sparen wir uns mal.

wobei wir bei min und max schon das $\frac{1}{h} \cdot h = 1$ gekürzt haben. Nehmen wir nun den Grenzwert $h \to 0$ so bekommen wir aus (5.2) nun

$$\begin{array}{ccccc}
\min_{s\in[x,x+h]} f(s) & \leq & \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t & \leq & \max_{s\in[x,x+h]} f(s) \\
\downarrow{\scriptstyle h\to 0} & & & & \downarrow{\scriptstyle h\to 0} \\
f(x) & & & & f(x) \\
& & \downarrow{\scriptstyle h\to 0} & & \\
& & \boxed{F'(x) = f(x)} & &
\end{array}$$

Damit haben wir nun vollständig den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bewiesen.

Theorem 5.1.1 (HDI - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig und* $F(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ *die (eine)* Stammfunktion *für ein* $a \in \mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$*.*

Hier sehen wir die herausragende Stellung vom HDI und verstehen nun auch den Satz ganz am Anfang vom diesem Blatt. Wir müssen um das Integral $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ zu lösen also sehen[4] welche Funktion $F(x)$ man ableiten muss, damit man auf $f(x)$ kommt.

Haben wir ein $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$, dann ist auch jedes $F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$: $[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$. Und das sind auch schon alle F's mit dieser Eigenschaft.

Nehmen wir nun also ein solches $F(x)$. Wir berechnen wir dann

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

damit? Wir können ja nicht immer a fest lassen und für jedes dann $F(x) = F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ aufschreiben oder uns merken. Schreiben bzw. merken wir uns einfach mal für ein bestimmtes $a = \alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $F(x)$. Ändern wir dieses α dann, dann unterscheiden sich die beiden $F_a(x)$ und $F_\alpha(x)$ nur durch eine Konstante:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^\alpha f(t)\ \mathrm{d}t}_{=c} + \int_\alpha^x f(t)\ \mathrm{d}t = c + F_a(x).$$

Sei also $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_a^\alpha f(t)\ \mathrm{d}t + \int_\alpha^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_\alpha^a f(t)\ \mathrm{d}t + \int_\alpha^b f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= -F(a) + F(b) = F(b) - F(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c).
\end{aligned}$$

[4]Und das muss man sehen, darin liegt die Kunst. Beim Ableiten ist man (stupide) vorgegangen und hat Technik angewendet.

Wir können das Integral also als Differenz aus einem $F(x)$ berechnen und wir sehen an der letzten Gleichung, dass die Wahl von $F(x)$ dabei keine Rolle spielt. Je zwei Stammfunktionen unterscheiden sich ja nur durch eine Konstante und die kürzt sich gerade bei der Differenzbildung heraus! Wir haben also

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

für jede Stammfunktion F von f.

So, genug gequatscht bzw. geschrieben und gelesen. Schauen wir uns ein paar Beispiele an und wenden das Gelernte mal richtig an.

Beispiel 5.1.2. Sei $a(x) = x$ (auf $\mathbb{R}$).[5] Wir wollen $\int_0^1 x\ \mathrm{d}x$ berechnen.

(i) Welche Funktion $F(x)$ müssen wir ableiten, damit $F'(x) = x$ heraus kommt? Scharfes Hinschauen liefert: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$.

(ii) Für $\int_0^1 x\ \mathrm{d}x$ berechnen wir dann also:

$$\int_0^1 x\ \mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$

Wir bekommen also genau das gleich Ergebnis[6] heraus wie wir im letzten Blatt ausführlich mit Treppenfunktionen und Summation errechnet haben. Ich hoffe aber, dass jeder erkennt, das diese Berechnung hier mit der Stammfunktion wesentlich schneller geht!

Wir wollen nun aber nicht immer das ganze mit $F(x) = \ldots$ etc. aufschreiben. Es gibt dafür eine kurze Variante:

$$\int_0^1 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot x^2 \Bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$

Um die Berechnung der Integrale $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ gut und effektiv aufzuschreiben verwenden wir also das Format:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(x)\big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Dabei ist $F(x)\big|_{x=a}^{b}$ als die Differenz $F(b) - F(a)$ definiert. Es gibt auch andere Schreibweisen dafür:

$$F(x)\big|_{x=a}^{b} = \big[F(x)\big]_{x=a}^{b} = \ldots$$

Ich bevorzuge nur den einen Strich $\big|$. Das ist (meist) ausreichend. Nur wenn es komplizierter wird und Abtrennungen erforderlich sind, umklammere ich $F(x)$ komplett. Wichtig ist

[5] Wir lassen jetzt mal den ganzen Schrumms "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig" weg und schreiben nur die Funktionsvorschrift hin. Das reicht jetzt auch mal aus.

[6] Glücklicherweise!

aber (für mich), dass man nicht nur $F(x)\big|_a^b$ schreibt sondern vorzugsweise das $x =$ noch dazu nimmt. So weiß man immer, in welche Variable man einsetzt. Wir werden später nämlich Integration im mehrdimensionalen machen, d.h. in x, y, z etc. Und da ist es gut genau hinzuschreiben, für welche Variable nun die Grenzen gelten. Es könnte ja auch sein, dass $f(x)$ von Konstanten abhängt: $f(x) = \alpha \cdot \sin(c \cdot x)$. Oder die Funktion ist einfach als

$$\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

gegeben. Das ist übrigens die Strahlungsdichte eines schwarzen (also idealen) Strahlers. h ist dabei das Plancksche Wirkungsquantum (eine Konstante), ν die Frequenz, c die Lichtgeschwindigkeit (wieder eine Konstante), k die Boltzmann Konstante (wie der Name sagt wieder eine Konstante) und letztendlich T die (absolute) Temperatur (d.h. in K) des schwarzen Körpers. Diese Funktion hängt also von ν und T ab. Wenn wir diese Integrieren um z.B. die Energie zu bestimmen, die der schwarze Körper in einem bestimmten Frequenzintervalls $[\nu_1, \nu_2]$ abgibt (z.B. im sichtbaren Bereich[7]) so integrieren wir über ν. Beim Integral zeigen wir dies ja auch dadurch an, indem wir das Integral mit $\int$ beginnen und mit dx (bzw. dν etc.) abschließen. Also sollten wir bei der Stammfunktion nun auch nicht schlampig/nachlässig werden.[8]

Machen wir noch ein Beispiel.

Beispiel 5.1.3. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ und

$$\int_3^4 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x.$$

Dann haben wir

$$\int_3^4 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln x\ \Big|_{x=3}^4 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}.$$

Aufgabe 5.1.4. Berechnen Sie.

(a) $\displaystyle\int_0^2 5 \cdot x^4 + x^2\ \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x\ \mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\ \mathrm{d}x.$

5.1.2 Partielle Integration

Greif wir nun noch ein bissel in die Trickkiste um noch mehr Integrale explizit lösen zu können.

[7] Glühbirne!

[8] Sonst konstruieren wir noch eine Glühbirne die nicht im sichtbaren strahlt sondern im UV oder wenns ganz böse läuft im Röntgenbereich leuchtet. Das Ding will ich dann aber definitiv nicht in meiner Lampe haben!

Wir haben ja im HDI gesehen

$$F'(x) = f(x).$$

Wir kennen aber auch die Ableitung von Produkten:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Integrieren liefert

$$u \cdot v = \int (u \cdot v)' \, \mathrm{d}x = \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x + \int u \cdot v' \mathrm{d}x.$$

Diese Formel nutzen wir meist in folgender Weise (*partielle Integration* (PI)):

$$\boxed{\int u' \cdot v \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u \cdot v' \, \mathrm{d}x}$$

bzw.

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dabei sieht die rechte Seite nun echt nicht einfacher aus. Aber geschickt angewendet, ist sie das in der Tat! Schauen wir uns folgendes Beispiel dazu an.

Beispiel 5.1.5. Wir wollen $\int_0^2 x \cdot e^x \, \mathrm{d}x$ berechnen. Hier sehen wir[9] eine Stammfunktion. Aber wir können ja mal die partielle Integration (PI) ausprobieren:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{e^x}_{=v'} \, \mathrm{d}x &\overset{\mathrm{PI}}{=} \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{e^x}_{=v} \Bigg|_{x=0}^2 - \int_0^2 \underbrace{1}_{=u'} \cdot \underbrace{e^x}_{=v'} \, \mathrm{d}x \\
&= 2e^2 - 0 - \int_0^2 e^x \, \mathrm{d}x \\
&= 2e^2 - \left[e^x\right]_{x=0}^2 \\
&= 2e^2 - (e^2 - 1) \\
&= \underline{\underline{e^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

Hier habe ich mal die Formulierung $[F(x)]_{x=a}^b$ genommen um sicher zu stellen, dann nicht noch die Konstante $2e^2$ mit in der Differenz aufgenommen wird und somit am Ende verschwindet.

An diesem Beispiel sehen wir, es funktioniert! Es wird einfacher. Aber nur, wenn wir die Zuordnung von u und v richtig machen. Machen wir diese Zuordnung nämlich falsch, d.h. hier umgekehrt bekommen wir

$$\int_0^2 \underbrace{x}_{=v'} \cdot \underbrace{e^x}_{=u} \, \mathrm{d}x \overset{\mathrm{PI}}{=} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{=v} \cdot \underbrace{e^x}_{=u} \Bigg|_{x=0}^2 - \int_0^2 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{=v} \cdot \underbrace{e^x}_{=u'} \, \mathrm{d}x.$$

[9] Ich zumindest nicht.

Das zweite Integral rechts ist nicht einfacher geworden. Anstellen von $x \cdot e^x$ haben wir nun sogar $x^2 \cdot e^x$ zu integrieren. Nochmalige PI liefert dann sogar noch schlimmeres: $x^2 \cdot e^x$, $x^3 \cdot e^x$, ... Wir müssen also unbedingt auf die richtige Zuordnung von u und v achten. Das bekommt man nur durch scharfes Hinschauen oder Probieren heraus.

Schauen wir noch tiefer in die mathematische Trickkiste hinein! Die partielle Integration ist also gut, um Produkte zu integrieren. Aber manchmal ist ein Produkt da obwohl keins da ist.[10] Schauen wir uns einfach mal ein Beispiel an um zu sehen, was ich damit meine.

Beispiel 5.1.6. Wir wollen $\int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x$ berechnen. Dies ist *a priori* aber kein Produkt, oder? Aber ich behaupte, es ist ein Produkt und wir können die partielle Integration anwenden. Es gilt offensichtlich:

$$\ln x = 1 \cdot \ln x.$$

Sieht einfach aus. Hilft aber enorm wie wir sehen:

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x = \int_1^e \underbrace{1}_{=u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{=v} \, \mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{\ln x}_{=v} \Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e \underbrace{x}_{=u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{=v'} \, \mathrm{d}x \\
&= x \cdot \ln x \Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e 1 \, \mathrm{d}x \\
&= x \cdot \ln x - x \Big|_{x=1}^{e} \\
&= e \cdot \ln e - e - (1 \cdot \ln 1 - 1) \\
&= \underline{\underline{1}}.
\end{aligned}$$

Zu bemerken ist nun noch, dass man die partielle Integration eventuell mehrfach machen muss. Wir haben am Integral über $x \cdot e^x$ gesehen, das mit partieller Integration wir zu einem Integral über $e^x = x^0 \cdot e^x$ kommen. Integrieren wir so z.B. $x^n \cdot e^x$ mit partieller Integration richtig, so besteht die berechtigte Hoffnung, dass wir sukzessive auf $x^{n-1} \cdot e^x$, $\ldots$, $x \cdot e^x$ und letztendlich auf e^x kommen.

Aufgabe 5.1.7. Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Integration.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot e^x \, \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int_1^e x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x.$

[10] Was?

5.1.3 Substitution

Noch ein Trick. Nehmen wir $F(x)$, dann haben wir ja $F'(x) = f(x)$. Nehmen wir aber $F(g(x))$, dann haben wir

$$F(g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Integrieren wir dies bekommen wir

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = F(g(x)).$$

Beispiel. Wir haben $(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x$ und somit

$$\int_0^1 e^{x^2} \cdot 2x\ \mathrm{d}x = e^{x^2}\Big|_{x=0}^1 = \underline{\underline{e-1}}.$$

Aber wie erkennen und handhaben wir das, wenn die Sache in

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x$$

komplizierter ist? An dieser Stelle kommt uns eine sehr interessante Eigenart der Notation zu Hilfe.[11] Wir können nämlich

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \mathrm{d}y = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \cdot \mathrm{d}y$$

schreiben, als wenn wir mit dy erweitern würden. Das können wir so verstehen, dass nun die Variable y von x abhängt: $y = y(x)$. Schauen wir in

$$\int_0^1 e^{x^2} \cdot 2x\ \mathrm{d}x$$

nochmal genauer hinein, so stört uns ja (eigentlich nur) das x^2 in e^{x^2}. Probieren wir einfach mal $y = y(x) = x^2$, d.h.

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = y'(x)\ \mathrm{d}x$$

und somit in unserem Fall

$$y = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}y = 2x\ \mathrm{d}x.$$

Damit können wir nun aber unser ursprüngliches Integral umschreiben:

$$\int e^{\overbrace{x^2}^{=y}} \cdot \underbrace{2x\ \mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}y} = \int e^y\ \mathrm{d}y.$$

Das Integral rechts sieht nun wesentlich einfacher aus. Aber was passiert mit den Integrationsgrenzen x_1 und x_2? Nun ja, wenn x von x_1 bis x_2 läuft, dann sollte $y = y(x)$ doch von $y_1 = y(x_1)$ bis $y_2 = y(x_2)$ laufen. Und in der Tat, so ist es.

[11] Diese Notation dx, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, $\int \cdot\ \mathrm{d}x$ geht auf Leibniz zurück.

Beispiel 5.1.8. Schauen wir uns nochmal die Aufgabe 12.2(d) an:

$$\int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x.$$

Durch scharfes Hinschauen können wir erraten bzw. auf die Idee kommen $y = \sin x$ zu probieren:

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ \mathrm{d}x = y'(x) \ \mathrm{d}x = \cos x \ \mathrm{d}x.$$

Und somit

$$\int \underbrace{\sin x}_{=y} \cdot \underbrace{\cos x \ \mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}y} = \int y \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\sin x)^2.$$

Wir können also ohne die Grenzen x_1 und x_2 zu ersetzten (substituieren) auch rechnen:

$$\int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x)^2 \Big|_{x=0}^{\pi} = 0.$$

Aber wollen wir mal die Grenzen ebenfalls substituieren. Wir haben dann mit $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$ sowie $y = \sin x$ die neuen Grenzen

$$y_1 = \sin x_1 = \sin 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad y_2 = \sin x_2 = \sin \pi = 0.$$

D.h.

$$\int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x = \int_0^0 y \ \mathrm{d}y = 0.$$

Das Integral stellt sich also wieder als $= 0$ heraus, diesmal sogar aus dem einfachen Grund, das obere und untere Integralgrenze nach der Substitution gleich sind.

Schauen wir uns ein weiteres Beispiel an.

Beispiel 5.1.9. Sei

$$\int_0^2 x^3 \cdot e^{x^2} \ \mathrm{d}x.$$

Uns stört hier wieder das x^2 in e^{x^2}. Setze also $y = x^2$. Wir bekommen dann

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ \mathrm{d}x = y'(x) \ \mathrm{d}x = 2x \ \mathrm{d}x$$

oder

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{2x}.$$

Setzen wir dies und $x^2 = y$ in unser Integral ein bekommen wir

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} \ \mathrm{d}x = \int x^3 \cdot e^y \ \frac{\mathrm{d}y}{2x} = \frac{1}{2}\int x^2 \cdot e^y \ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int y \cdot e^y \ \mathrm{d}y.$$

Aus den Integralgrenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ wird dann $y_1 = y(x_1) = x_1^2 = 0$ und $y_2 = y(x_2) = x_2^2 = 2^2 = 4$. Zusammen erhalten wir also

$$\int_0^2 x^3 \cdot e^{x^2} \ \mathrm{d}x = \int_0^4 y \cdot e^y \ \mathrm{d}y.$$

Das rechte Integral ist nun einfacher und wir können es wieder mit partieller Integration lösen:

$$\int_0^4 y \cdot e^y \, \mathrm{d}y = y \cdot e^y \Big|_{y=0}^4 - \int_0^4 e^y \, \mathrm{d}y = y \cdot e^y - e^y \Big|_{y=0}^4 = (y-1) \cdot e^y \Big|_{y=0}^4 = 3e^4 + 1.$$

Also insgesamt erhalten wir dann die Lösung:

$$\underline{\underline{\int_0^2 x^3 \cdot e^{x^2} \, \mathrm{d}x = 3e^4 + 1.}}$$

Wir können die Substitution in folgender Weise in einer Formel zusammenfassen:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, \mathrm{d}y.}$$

Aufgabe 5.1.10. Berechnen Sie mit Hilfe von Substitution.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} x^3 \cdot \sin(x^4) \, \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \cos(2x-3) \, \mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int_3^4 e^{5x-4} \, \mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \cdot \sin(x^2) \cdot e^{\cos(x^2)} \, \mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^2 \tan x \, \mathrm{d}x$. Tipp: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Lösungen

Lösung (von Aufgabe 5.1.4)**.** Wir berechnen:

(a) $\displaystyle\int_0^2 5\cdot x^4 + x^2 \,\mathrm{d}x = x^5 + \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^2 = \underline{\underline{2^5 + \frac{2^3}{3}}}.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x \,\mathrm{d}x = e^x\big|_{x=-1}^1 = \underline{\underline{e - e^{-1}}}.$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\big|_{x=0}^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}.$

Lösung (von Aufgabe 5.1.7)**.** Wir berechnen mit Hilfe der partiellen Integration.[12]

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\cdot e^x \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'} \,\mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v}\,\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{e^x}_{v}\,\mathrm{d}x\\
&= x^2\cdot e^x\,\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{PI}}{=} x^2\cdot e^x\,\Big|_{x=0}^1 - \left[\underbrace{2x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v}\,\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \underbrace{2}_{u'}\cdot\underbrace{e^x}_{v}\,\mathrm{d}x\right]\\
&= x^2\cdot e^x\,\Big|_{x=0}^1 - 2x\cdot e^x\,\Big|_{x=0}^1 + 2e^x\,\Big|_{x=0}^1\\
&= (x^2 - 2x + 2)\cdot e^x\,\Big|_{x=0}^1\\
&= \underline{\underline{e-2}}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi x\cdot\sin x \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\sin x}_{v'} \,\mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\Big|_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\mathrm{d}x\\
&= -x\cdot\cos x\,\Big|_{x=0}^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x\\
&= -x\cdot\cos x\,\Big|_{x=0}^\pi - \sin x\,\Big|_{x=0}^\pi\\
&= -x\cdot\cos x - \sin x\,\Big|_{x=0}^\pi\\
&= -\pi\cdot\cos\pi - \sin\pi + 0 + 0\\
&= \underline{\underline{\pi}}.
\end{aligned}$$

[12]Na hoffentlich hab ich mich hier nicht verrechnet oder vertippt...

(c) $\displaystyle\int_1^e x \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int_1^e \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} \,\mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} \Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x \Big|_{x=1}^{e} - \int_1^e \frac{1}{2}x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x \Big|_{x=1}^{e} - \frac{1}{4}x^2 \Big|_{x=1}^{e} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 \Big|_{x=1}^{e} \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 - 0 + \frac{1}{4} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4}(e^2+1)}}.\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$:

$$\int_0^\pi \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} \,\mathrm{d}x \overset{\text{PI}}{=} \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} \Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \underbrace{\cos x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} \,\mathrm{d}x \qquad \Big| + \int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

(hier wenden wir also eine kleine Trick an)

$$\begin{aligned}2\int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x &= (\sin x)^2 \Big|_{x=0}^{\pi} = 0 - 0 = 0 \qquad \Big| \div 2 \\ \int_0^\pi \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x &= \underline{\underline{0}}.\end{aligned}$$

Lösung (von Aufgabe 5.1.10)**.** Wir berechnen mit Hilfe von Substitution.

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} x^3 \cdot \sin(x^4) \,\mathrm{d}x$:

$y = x^4$, $y_1 = y(x_1) = 0^4 = 0$, $y_2 = y(x_2) = (\sqrt[4]{\pi})^4 = \pi$, $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = 4x^3\,\mathrm{d}x$, also

$$\int_0^{\sqrt[4]{\pi}} x^3 \cdot \sin(x^4) \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x^3 \cdot \sin(y) \,\frac{\mathrm{d}y}{4x^3} = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin y \,\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\cos y \Big|_{y=0}^{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \cos(2x-3) \,\mathrm{d}x$:

$y = 2x-3$, $y_1 = y(x_1) = 2\cdot 0 - 3 = -3$, $y_2 = y(x_2) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$, $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}x$, also

$$\int_0^3 \cos(2x-3) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-3}^3 \cos y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sin y \Big|_{y=-3}^{3} = \frac{1}{2}(\sin 3 - \sin(-3)) = \underline{\underline{\sin 3}}.$$

(c) $\displaystyle\int_3^4 e^{5x-4}\,\mathrm{d}x$:

$y = 5x-4$, $y_1 = y(x_1) = 5\cdot 3-4 = 15-4 = 11$, $y_2 = y(x_2) = 5\cdot 4-4 = 20-4 = 16$, $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = 5\mathrm{d}x$, also

$$\int_3^4 e^{5x-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_{11}^{16} e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{5}e^y\,\Big|_{y=11}^{16} = \underline{\underline{\frac{e^{16}-e^{11}}{5}}}.$$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cdot\sin(x^2)\cdot e^{\cos(x^2)}\,\mathrm{d}x$:

$y = \cos(x^2)$, $y_1 = y(x_1) = \cos 0 = 1$, $y_2 = y(x_2) = \cos((\sqrt{\pi})^2) = \cos\pi = -1$, $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = -2x\cdot\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$, also

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cdot\sin(x^2)\cdot e^{\cos(x^2)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{-1} 2x\cdot\sin(x^2)\cdot e^y\,\frac{\mathrm{d}y}{-2x\cdot\sin(x^2)}\\ &= -\int_0^{-1} e^y\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

da $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ ist folgt auch

$$= \int_{-1}^0 e^y\,\mathrm{d}y = e^y\,\Big|_{y=-1}^0 = \underline{\underline{1-e^{-1}}}.$$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^2 \tan x\,\mathrm{d}x$. Tipp: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$y = \cos x$, $y_1 = y(x_1) = \cos(-1) = \cos 1$, $y_2 = y(x_2) = \cos 2$, $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x\,\mathrm{d}x$, also

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \tan x\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\cos 1}^{\cos 2} \frac{\sin x}{y}\,\frac{\mathrm{d}y}{-\sin x}\\ &= \int_{\cos 1}^{\cos 2} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln y\,\Big|_{y=\cos 1}^{\cos 2} = \ln\cos 2 - \ln\cos 1 = \underline{\underline{\ln\frac{\cos 2}{\cos 1}}}.\end{aligned}$$