# Tutorien-/Selbstübungsblatt 1

Begleitend zu dieser Vorlesung empfehle ich auch die Videoaufzeichnungen von

Bastian Goldlücke auf YouTube.

Als zusätzliche Literatur zu die Vorlesung empfehle ich

- S. Hildebrandt: *Analysis 1*, Springer Verlag.

In diesen Tutorienblättern werden auch Dinge wiederholt oder zusätzlich angeboten. Diese Kapitel sind mit einem * gekennzeichnet. Die betrifft in diesem Blatt zum Beispiel das Kapitel 1.3* über komplexe Zahlen.

## 1.1 Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Für eine einfache, aber trotzdem mathematisch korrekte, Einführung in die Zahlenbereiche

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+ \right\}$
- $\mathbb{R}$

siehe zum Beispiel

- H. Koch: *Eine Einführung in die Mathematik*, Springer Verlag.

## 1.2 Mengenlehre und Mächtigkeit von Mengen

Für eine einfache, aber trotzdem mathematisch korrekte, Einführung in die Theorie der Mengen und Mächtigkeiten von Mengen siehe zum Beispiel

- O. Deiser: *Einführung in die Mengenlehre*, Springer Verlag.

## 1.3* Komplexe Zahlen

...sind wie reelle Zahlen, nur komplexer. In den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ können wir wie in $\mathbb{R}$ addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren.

In $\mathbb{C}$ gibt es neben der 1 auch noch $i$. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als

$$z = a + b \cdot i$$

mit eindeutigen reellen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei gilt

$$i^2 = -1.$$

**Addition und Subtraktion.** Haben wir zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i \qquad \text{und} \qquad z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$$

gegeben, so können wir sie addieren und subtrahieren. Für die Addition haben wir

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

und für die Subtraktion haben wir

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) - (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i,$$

d.h. sowohl Addition als auch Subtraktion sind komponentenweise erklärt. Wir behandeln also beide Teile ($a$-Teil Realteil und $b$-Teil Imaginärteil) getrennt. Wir haben z. B.

$$(4 + i) + (3 - 2i) = 4 + 3 + i - 2i = 7 - i$$

und

$$(4 + i) - (3 - 2i) = 4 - 3 + i + 2i = 1 + 3i.$$

**Aufgabe 1.3.1.** Seien

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 16 + 4i \qquad \text{und} \qquad z_3 = 7 - 3i$$

gegeben.[1] Berechnen Sie:

a) $z_1 + z_2$,

b) $z_1 + z_3$,

c) $z_1 - z_2$,

d) $z_2 - z_3$.

**Multiplikation.** Haben wir wieder zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = a_1 + b_1 i \qquad \text{und} \qquad z_2 = a_2 + b_2 i$$

gegeben, wie könnte die Multiplikation beider aussehen? In der Addition und Subtraktion haben wir die Real- und Imaginärteile separat addiert bzw. subtrahiert. Bei der Multiplikation können wir dies ebenfalls machen und wenden das bekannte Ausklammern eines Produktes mit zwei Faktoren an:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i \cdot a_2 + b_1 i \cdot b_2 i \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

wobei wir mit $i^2 = -1$ bekommen

$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

So haben wir

$$(1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i - i^2 = 2 + i + 1 = 3 + i.$$

[1] Wir können dabei das $\cdot$ zwischen $b$ und $i$ weg fallen lassen, d.h. $4 \cdot i$ wird einfach $4i$.

**Aufgabe 1.3.2.** Seien

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 3 - 2i \qquad \text{und} \qquad z_3 = -1 + i$$

gegeben. Berechnen Sie:

a) $z_1 \cdot z_2$,

b) $z_1 \cdot z_3$,

c) $z_2 \cdot z_3$,

d) $z_2 \cdot z_1$,

e) $(z_1 + z_2) \cdot z_3$,

f) $z_1 \cdot (z_2 - z_3)$.

**Konjugation.** Da wir in einer komplexen Zahl zwei Komponenten haben (Real- und Imaginärteil) betrachten wir zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

mal die folgende Zahl

$$\overline{z} := a - bi.$$

Multiplizieren wir beide Zahlen bekommen wir

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Also ist für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ das Produkt $z \cdot \overline{z}$ immer reell und sogar nicht negativ. Bei gegebener Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist also auch $\overline{z}$ interessant. Wir nennen $\overline{z}$ die zu $z$ konjugierte komplexe Zahl, sprich "$z$-quer". Konjugation verträgt sich mit Addition, Subtraktion und Multiplikation:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \qquad \text{und} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

**Aufgabe 1.3.3.** Seien

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 3 - 4i \qquad \text{und} \qquad z_3 = -2 + 2i$$

gegeben. Berechnen Sie:

a) $\overline{z_1}$,

b) $\overline{z_2}$,

c) $\overline{z_3}$,

d) $\overline{z_1 + z_2}$,

e) $\overline{z_1 - z_3}$,

f) $\overline{z_1 \cdot z_2}$,

g) $\overline{z_1} \cdot z_2$,

h) $(\overline{z_2} - z_3) \cdot \overline{(z_1 + z_3)}$,

i) $\overline{z_1} \cdot (z_2 + z_3) \cdot (z_1 - \overline{z_2})$.

**Betrag.** Bei der komplexen Konjugation haben wir schon gesehen, dass

$$z \cdot \overline{z} \geq 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Wir können daher die Wurzel daraus ziehen und bezeichnen

$$|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

als den Betrag von $z \in \mathbb{C}$. Wir haben

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

d.h. der Betrag von $a + bi$ ist genau der Euklidische Abstand zwischen $a + bi$ und dem Koordinatenursprung 0 in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Die folgenden (Un-)Gleichungen lassen sich einfach nachrechnen:

$$|\overline{z}| = |z|, \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Wir haben auch

$$|z| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0.$$

**Aufgabe 1.3.4.** Seien

$$z_1 = 1 + i \qquad \text{und} \qquad z_2 = 2 - 3i$$

gegeben. Berechnen Sie:

a) $|z_1|$,

b) $|z_2|$,

c) $|\overline{z_1}|$,

d) $|z_1 \cdot \overline{z_2}|$.

**Division.** Haben wir zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben, wollen wir auch die Division

$$\frac{z_1}{z_2}$$

betrachten. Aus der komplexen Konjugation wissen wir schon, dass $z_2 \cdot \overline{z_2} \geq 0$ ist, also insbesondere reell ist. Und mit

$$|z| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0$$

bekommen wir mit dem Trick der Erweiterung

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

dass wir die Division durchführen können, wenn $z_2 \neq 0$ gilt, und dass wir sie ausrechnen können, indem wir sie auf die Division in $\mathbb{R}$ zurückführen können. So bekommen wir

$$\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i) \cdot \overline{(1+i)}}{(i+1) \cdot \overline{(1+i)}} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1-3i) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

**Aufgabe 1.3.5.** Seien

$$z_1 = 2 + i, \qquad z_2 = -1 + 2i \qquad \text{und} \qquad z_3 = 3 + 2i$$

gegeben. Berechnen Sie:

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$,

b) $\dfrac{z_2}{z_3}$,

c) $\dfrac{1}{z_1}$,

d) $\dfrac{z_3}{z_1 \cdot z_2}$.

**Eulersche Formel.** Da wir nun wissen wie wir addieren und multiplizieren, können wir Polynome

$$c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

komplex betrachten, d.h. $c_0, \ldots, c_n, z \in \mathbb{C}$. Da wir auch den Betrag zur Verfügung haben, können wir auch Reihen[2]

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

komplex betrachten, d.h. $c_k, z \in \mathbb{C}$. Zu den wichtigsten Reihen und somit Funktionen gehört

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Wir haben wie im reellen Fall auch im komplexen Fall

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Wir wissen also, dass $e^z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl ist und wir haben auch

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Aber wie rechnen wir $e^z$ aus?

Mit $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ bekommen wir für $a, b \in \mathbb{C}$

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

und $e^a$ können wir in $\mathbb{R}$ berechnen. Es bleibt also $e^{bi}$ zu bestimmen. Da $i^2 = -1$ gilt, haben wir

$$e^{bi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \cdot b^k}{k!}$$

[2]Lasst euch von der folgenden Herleitung mit den Reihen nicht verwirren. Bisher haben wir noch keine Reihen kennen gelernt. Wir haben hier an dieser Stelle aber das schonmal als kleinen Ausblick gebracht. Wenn ihr das mit den Reihen hier noch nicht versteht, ist das vollkommen in Ordnung.

zerlegen wir die Summe in gerade $k$ $(= 2n)$ und ungerade $k$ $(= 2n + 1)$ bekommen wir

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \cdot b^{2n}}{(2n)!} + \frac{i^{2n+1} \cdot b^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und mit $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = i \cdot (-1)^n$ bekommen wir

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot b^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \frac{(-1)^n \cdot b^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot b^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot b^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und mit den Reihen $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ folgt

$$= \cos b + i \cdot \sin b.$$

Wir erhalten also die sogenannte Eulersche Formel

$$e^{bi} = \cos b + i \cdot \sin b$$

und allgemein

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b).$$

Wir können auf diese Weise $e^z$ berechnen.

**Beispiel 1.3.6.** Sei $z = 3 + \frac{\pi}{2} i$, so gilt

$$e^z = e^{3+\pi i/2} = e^3 \cdot e^{\pi i/2} = e^3 \cdot (\cos(\pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2)) = e^3 \cdot (0 + 1 \cdot i) = e^3 \cdot i.$$

**Aufgabe 1.3.7.** Berechnen Sie:

a) $\exp(-7 + \pi i/4)$,

b) $\exp(1 - 3i)$,

c) $|\exp(-7 + 19\pi i/8)|$

d) $\overline{\exp(-8 + \pi i/4)}$,

e) $\exp(\pi i/4)$,

f) $\exp(\pi i/2)$,

g) $\exp(3\pi i/4)$,

h) $\exp(\pi i)$,

i) $\exp(2\pi i)$,

j) $\exp(z + n\pi i)$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}$,

k) $\exp(z + 2n\pi i)$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}$,

l) $|\exp(i\varphi)|$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.

**Polardarstellung.** Nach der allgemeinen Eulerschen Formel

$$e^{\alpha+\varphi i} = e^\alpha \cdot e^{\varphi i} = e^\alpha \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = e^\alpha\cos\varphi + ie^\alpha\sin\varphi = a+bi = z$$

können wir jedes $z$ in der Form (Polardarstellung)

$$z = r\cdot e^{i\varphi}$$

mit $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ (oder besser in $[0, 2\pi)$ oder $[-\pi, \pi)$) schreiben, siehe Abbildung 1.1.

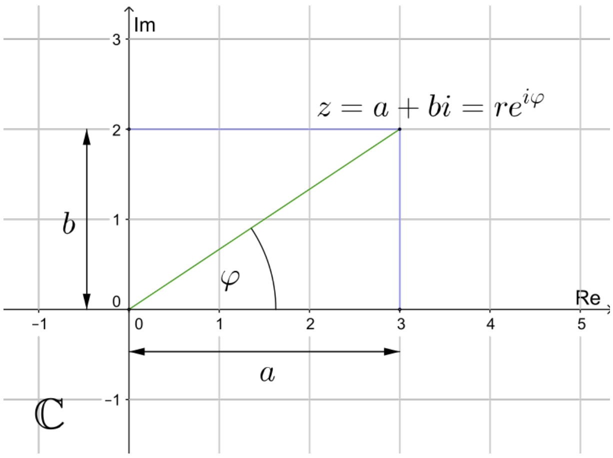


Abbildung 1.1: Darstellung einer komplexen Zahl $z = a+bi$ in der komplexen Zahlenebene. Beschreibung des Winkels $\varphi$ in der Polardarstellung. Quelle: Von Kmhkmh - Eigenes Werk, CC-BY 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=54559304.

Wie kommen wir an $r$ und $\varphi$ heran?
Für $r$ haben wir

$$|z| = |r\cdot e^{i\varphi}| = r\cdot|e^{i\varphi}| = r,$$

d.h. $r$ können wir sehr schnell berechnen. Dabei ist $r = 0$ genau dann wenn $z = 0$ gilt. Ansonsten ist $r = |z| > 0$.

**Aufgabe 1.3.8.** Berechne für die angegebenen $z$ die Werte für $r$ in der Polardarstellung.

a) $z = 1 + 2i$,

b) $z = 2 - 3i$,

c) $z = 5i$.

Um an $\varphi$ heran zu kommen, müssen wir für $z = a + bi$ die Gleichung

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{z}{|z|} = \frac{a+bi}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

d.h. die Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

lösen. Wir bekommen dann auch zusätzlich die Gleichung

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a}.$$

Nun stellt sich aber auf Grund der Periodizität von sin, cos, und tan aber die Bestimmung von $\varphi$ als etwas komplizierter als die Bestimmung von $r$ aus, welche ja sehr einfach ist. Wir haben nämlich

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-b}{-a} = \tan(\varphi+\pi)$$

das die tan-Gleichung nicht zwischen $z$ und $-z$ unterscheiden kann und haben daher zu entscheiden, ob $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$ oder $\varphi = \arctan\frac{b}{a} + \pi$ zu $z$ gehören. Zeichnen wir aber $z = a + bi$ in die Quadranten[3] von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein bzw. schauen auf die Vorzeichen von $a$ und $b$ so können wir an der Lage zwischen $\arctan\frac{b}{a}$ und $\arctan\frac{b}{a} + \pi$ entscheiden.

Sei $z = 1 + i$, dann

$$\arctan\frac{b}{a} = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

d.h. wir müssen uns zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ entscheiden. Da aber $a = 1 > 0$ und $b = 1 > 0$ ist, liegt $z$ im ersten Quadranten, siehe Abbildung 1.1. Daher muss $\varphi \in [0, \pi/2]$ sein. Es kommt damit nur $\varphi = \frac{\pi}{4}$ in Frage.

Sei aber $z' = -1 - i$, dann gilt wieder

$$\arctan\frac{b'}{a'} = \arctan\frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4},$$

d.h. wir müssen uns zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ entscheiden. Da aber $a = -1 < 0$ und $b = -1 < 0$ ist, liegt $z'$ im dritten Quadranten. Daher muss $\varphi' \in [\pi, 3\pi/2]$ sein. Also kann $\varphi'$ nur $\frac{5\pi}{4}$ sein.

**Aufgabe 1.3.9.** Bestimmen Sie für die in Aufgabe 1.3.8 angegebenen $z \in \mathbb{C}$ die Winkel $\varphi$.

**Potenzen.** Aus der Polardarstellung wissen wir, dass wir jedes $z \in \mathbb{C}$ auch als

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = e^{\alpha + i\varepsilon}$$

schreiben können. In $\mathbb{R}$ wissen wir aber auch, dass

$$(e^a)^b = e^{a\cdot b}$$

gilt. Damit können wir nun bestimmen, was $z^y$ für $y, z \in \mathbb{C}$ ist.

Seien dazu $z = e^{\alpha+i\varphi}$ und $y = a + bi$ komplexe Zahlen mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir haben

$$z^y = (e^{\alpha+i\varphi})^y = e^{y\cdot(\alpha+i\varphi)}.$$

[3] I. Quadrant: $a, b \geq 0$ (oben-rechts); II. Quadrant: $b \geq 0$, $a \leq 0$ (oben-links); III. Quadrant: $b \leq 0$, $a \leq 0$ (unten-links); IV. Quadrant: $a \geq 0$, $b \leq 0$ (unten-rechts).

Sei z.B. $z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} = 2^{1/2} \cdot e^{i\pi/4} = (e^{\ln 2})^{1/2} \cdot e^{i\pi/4} = e^{(\ln 2)/2 + i\pi/4}$ und $y = 4 - 4i$, dann haben wir

$$\begin{aligned} z^y = (1+i)^{4-4i} &= (e^{(\ln 2)/2 + i\pi/4})^{4-4i} \\ &= \exp[\{(\ln 2)/2 + i\pi/4\} \cdot (4 - 4i)] \\ &= \exp(2\ln 2 - 2i\ln 2 + i\pi - i^2\pi) \\ &= \exp(2\ln 2 + \pi + i(\pi - 2\ln 2)) \\ &= \exp(2\ln 2) \cdot \exp(\pi) \cdot \exp(-2i\ln 2) \cdot \exp(i\pi) \\ &= 4 \cdot \exp(\pi) \cdot \exp(-2i\ln 2) \cdot (-1) \\ &= -4e^{\pi} \cdot \exp(-2i\ln 2). \end{aligned}$$

Sieht nicht schön aus, ist aber so. Muss man mit leben. Leben ist kein Ponyhof.

**Aufgabe 1.3.10.** Berechnen Sie die folgenden Potenzen.

a) $(1 + i)^{1/2}$,

b) $(-1 + i)^i$,

c) $(2 - 2i)^{10938}$.

Insbesondere an der letzten Aufgabe erkennt man, dass das Umrechnen von $z$ in Polardarstellung sehr sinnvoll sein kann. Die letzte Aufgabe könnte man auch lösen, indem man $2 - 2i$ nach und nach 10938-mal mit sich selbst multipliziert. Wer Spaß dran hat kann das auch mal probieren und die Zeit stoppen welche Methode schneller ist.

## 1.4* Ungleichungen und Beträge

Haben wir eine Ungleichung

$$a < b$$

so können wir einen Wert $c \in \mathbb{R}$ dazu addieren und erhalten

$$a + c < b + c.$$

Formen wir aber Ungleichungen wie Gleichungen um, dann müssen wir aber bei der Multiplikation aufpassen. Sei $\alpha > 0$, dann erhalten wir weiterhin

$$\alpha a < \alpha b.$$

Ist hingegen $\alpha < 0$, dann bekommen wir

$$\alpha a > \alpha b.$$

Z.B. aus $-2 < 3$ folgt durch Multiplikation mit $-2$ die Ungleichung $(-2)(-2) = 4 > -6 = 3 \cdot (-2)$.

**Beispiel 1.4.1.** Haben wir die Ungleichung

$$-x + 3 < 7$$

und wir wollen wissen, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese erfüllt ist, dann rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} -x + 3 &< 7 && \mid -3 \\ -x &< 4 && \mid \cdot (-1) \\ x &> -4 \end{aligned}$$

also $x \in (-4, \infty)$.

**Aufgabe 1.4.2.** Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Ungleichungen?

**a)** $3x - 8 > 4$,

**b)** $-2x + 3 \geq x - 1$.

Schauen wir uns nun den Betrag an

$$|a| = b$$

mit $b \geq 0$, dann gilt

$$a = \pm b.$$

In der gleichen Weise lösen wir

$$|a| < b$$

auf. Das gibt nämlich

$$-b < a < b.$$

**Beispiel 1.4.3.** Wollen wir also die möglichen $x$ in

$$|3x - 4| < 5$$

bestimmen, gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{aligned} |3x - 4| &< 5 && \mid |\cdot| \text{ auflösen} \\ -5 < 3x - 4 &< 5 && \mid +4 \\ -1 < 3x &< 9 && \mid \div 3 \\ -\frac{1}{3} < x &< 3 \\ x &\in \left(-\frac{1}{3}, 3\right) \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.4.4.** Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen.

**a)** $|2x - 3| < 1$,

**b)** $|4x - 5| > 2$,

**c)** $x^2 < 4x - 3$.

# 1.5* Vollständige Induktion

In der Mathematik, wie Ihr bestimmt schon gemerkt habt, kommt es darauf an zu zeigen, dass Aussagen richtig (oder falsch) sind. Haben wir z.B. die Aussage

$$\mathsf{A} = \text{„Eine Woche hat sieben Tage."}$$

so ist diese wahr. Einzelne Aussagen werden also einzeln überprüft/bewiesen.

Es kommt aber sehr häufig vor, dass mehrere Aussagen bewiesen werden sollen, so z.B.

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_1 &= \text{„}1 = 1\text{"}\\
\mathsf{A}_2 &= \text{„}1 + 2 = 3\text{"}\\
\mathsf{A}_3 &= \text{„}1 + 2 + 3 = 6\text{"}\\
\mathsf{A}_4 &= \text{„}1 + 2 + 3 + 4 = 10\text{"}\\
&\ \vdots\\
\mathsf{A}_n &= \text{„}1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}\text{"} && (n \in \mathbb{N})\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Wir können die Aussagen $\mathsf{A}_1$, $\mathsf{A}_2$, …einzeln nachprüfen. Aber da wir nun nur endlich lange leben und auch wohl keiner Bock hat alle diese Aussagen solange zu prüfen bis er tot umfällt und die Aussagen $\mathsf{A}_n$ für all $n \in \mathbb{N}$ gelten (sollen), müssen wir intelligenter an diese Sache heran gehen. $\mathbb{N}$ ist zudem unendlich, d.h. wir würden so ehh nie fertig.

Schauen wir uns das also mal von einer anderen Seite an. Für $n = 1$ schauen wir uns die Aussage $\mathsf{A}_1$ an:

$$\mathsf{A}_1 = \text{„}1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1\text{"} \quad ✓$$

Für $n = 1$ stimmt die Aussage

$$\mathsf{A}_n = \text{„}1 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}\text{"}$$

also. Ggf. muss man auch rechnen oder richtig was beweisen. Schritt eins = *Induktionsanfang* (kurz IA) ist nun also fertig.

Kommen wir zu Schritt zwei = *Induktionsschritt*, der fällt vom Himmel bzw. Leute haben sehr lange darüber nachgedacht. Wir zeigen das folgende:

$$\text{Wenn } \mathsf{A}_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ wahr ist, dann ist auch } \mathsf{A}_{n+1} \text{ wahr.}$$

bzw.

$$\mathsf{A}_n ✓ \quad \Rightarrow \quad \mathsf{A}_{n+1} ✓$$

Nehmen wir an $\mathsf{A}_n$ stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt:

$$1 + \dots + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{((n+1)+1) \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile jetzt aber genau die Aussage $\mathsf{A}_{n+1}$ ist. Wir haben also eben nachgerechnet, dass unter der Voraussetzung, dass $\mathsf{A}_n$ stimmt, auch $\mathsf{A}_{n+1}$ stimmt. Dies ist der Induktionsschritt (IS).

Fassen wir beide Schritte (IA und IS) zusammen, dann haben wir gezeigt, dass $\mathsf{A}_1$ stimmt (IA) und wenn $\mathsf{A}_n$ stimmt, auch $\mathsf{A}_{n+1}$ (IS). IA impliziert daher, dass mit IS auch $\mathsf{A}_2$ stimmt. Da $\mathsf{A}_2$ stimmt, impliziert IS, dass $\mathsf{A}_3$ stimmt. Und so weiter und weiter:

$$\underbrace{\mathsf{A}_1 \checkmark}_{\text{IA}} \quad \xrightarrow{\text{IS}} \quad \mathsf{A}_2 \checkmark \quad \xrightarrow{\text{IS}} \quad \mathsf{A}_3 \checkmark \quad \xrightarrow{\text{IS}} \quad \dots \quad \xrightarrow{\text{IS}} \quad \mathsf{A}_n \checkmark \quad \xrightarrow{\text{IS}} \quad \dots$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Aussage $\mathsf{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Methode durch Induktion (IS) gemacht wird und alle Aussagen $\mathsf{A}_n$ vollständig abdeckt bzw. beweist, heißt diese Methode *vollständige Induktion*.

Vollständige Induktion kann man sich bildlich auch wie Treppensteigen vorstellen. Ich zeige euch wie ihr vom Boden auf die erste Treppenstufe kommt. Und dann wenn ihr auf einer beliebigen Stufe seit, wie ihr zur nächsten kommt. Damit könnt ihr dann immer eine Stufe höher und so die komplette Treppe hochlaufen. Dabei ist es auch egal, welche Treppe ihr hochlaufen wollt. Sei es nun die Treppe in eurem Wohnhaus, die Spanische Treppe in Rom oder sonst eine Treppe. IA: Erste Stufe nehmen; IS: dann von einer Stufe auf die nächste. Fertig.

Tipp: Manchmal fängt die Induktion bei 0 oder 2 an. Sie muss nicht bei 1 anfangen. Wenn Sie bei 2 anfängt, muss sie daher aber auch nicht für 1 gelten.

**Aufgabe 1.5.1.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

**a)** Es gilt
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

**b)** Es gilt
$$\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

**c)** Es gilt
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$
für alle $n \geq 2$.

## 1.6 Folgen

Also, bisher haben wird das Konzept einer Zahl immer benutzt. Das sollte jetzt auch klar sein. Sei sie reell oder komplex. Eine Zahl ist also ein

$$a$$

z.B. $a = 7$, $\pi$ oder $1 + i$, etc.

Aber Ihr habt sicherlich schon festgestellt, dass man sehr häufig mehr als eine Zahl braucht. So brauchen wir vielleicht mehrere Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n.$$

Brauchen wir aber nicht mehr nur endlich viele Zahlen, sondern unendlich viele (abzählbare viele), d.h.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Wir nehmen also einen Index, z.B. $n$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ geben wir eine Zahl

$$a_n$$

an. Das Ding nennen wir *Folge*. Eine Folge können wir als

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

schreiben und wie wir gesehen haben ist damit eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$$

verbunden. Jedem Index $n \in \mathbb{N}$ wird also ein Wert $a_n$ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, einem Vektorraum $V = \mathbb{R}^d$, etc.) zugeordnet.

Schauen wir uns ein paar Folgen an.

**Beispiel 1.6.1.** **a)** konstante Folge: $a_n = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

**b)** alternierende Folge: $b_n = (-1)^{n+1}$, $b = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$

**c)** $c_n = \frac{1}{n}$: $c = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

**d)** $d_n = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n}$: $d = (2, -1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{4}, \ldots)$

**e)** $e_n = n^2$: $e = (1, 4, 9, 16, \ldots)$

### Häufungspunkt

An der konstanten Folge in a) beobachten wir das Folgende. Da alle Glieder der Folge $a_n = c$, kommt der Wert $c$ im wahrsten Sinne des Wortes *häufig* vor, nämlich immer!

An der alternierenden Folge in b) beobachten wir, dass die Folge zwar nicht konstant ist, aber "fast": Sie nimmt nur die Werte $+1$ und $-1$ an. Sowohl $+1$ als auch $-1$ kommen *häufig* vor, d.h. unendlich oft!

Bei der Folge c) wird es interessant. Da $c_n = \frac{1}{n}$, wird kein Wert zweimal oder sogar noch öfter angenommen. Aber: Schauen wir uns die 0 an, die von der Folge nicht angenommen wird, so können wir um die 0 eine kleine $\varepsilon$-Umgebung anschauen, d.h. das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Egal wie klein das $\varepsilon > 0$ gewählt wird, irgendwann liegen alle Glieder $a_n$ in diesem Intervall. Dazu muss $n$ nur groß genug sein, z.B. $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Dann haben wir, dass unendlich viele Glieder $c_n$ (nämlich die mit $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$) in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegen. Egal wie klein $\varepsilon$ auch gewählt wird! Um die 0 *häufen* sich also die Werte der Folge $c = (c_n)$.

Bei der Folge in d) wird es noch komplizierter. Wenn der Index $n$ gerade ist, dann nähern sich die Werte $d_n$ an die $-1$ an. Wenn der Index $n$ ungerade ist, dann nähern sich die Werte $d_n$ der $+1$ an. Aber $-1$ oder $+1$ werden nicht angenommen. Aber wie im Falle der Folge in c) *häufen* sich die Werte $d_n$, nämlich um $+1$ und $-1$. Wir können um $-1$ und $+1$ wieder $\varepsilon$-Umgebungen legen, d.h.

$$(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \qquad \text{und} \qquad (1-\varepsilon, 1+\varepsilon),$$

und egal wie klein $\varepsilon$ auch gewählt wird, es liegen in jedem Intervall unendlich viele $d_n$ drin.

Diese Punkte nennen wir *Häufungspunkte*.

Es gibt wie im Falle e) aber auch Folgen, die keine Häufungspunkte haben. Für die Quadrate $e_n = n^2$ die die Folge $e$ bilden gibt es keine Häufungspunkte.

**Definition 1.6.2.** *Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $\varepsilon > 0$. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt* Häufungspunkt*, wenn in*

$$(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$$

*unendlich viele $a_n$ enthalten sind.*

**Aufgabe 1.6.3.** Bestimmen Sie die Häufungspunkte der folgenden Folgen.

**a)** $a_n = -2 + \frac{1}{n^2}$,

**b)** $b_n = (-1)^n - \frac{1}{n^4}$,

**c)** $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

## Grenzwert einer Folge

Wir haben also gesehen, dass Folgen keine Häufungspunkte, genau einen Häufungspunkt, genau zwei Häufungspunkte etc. haben können. Dabei ist die Eigenschaft genau einen Häufungspunkt zu haben sehr interessant.

Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit genau einem Häufungspunkt, sagen wir $A$. Dann liegen für $\varepsilon > 0$ in

$$(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

unendlich viele Folgenglieder $a_n$ drin.

Was passiert aber, wenn in $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ nicht nur unendlich viele Werte $a_n$ liegen, sondern *alle bis auf endlich viele*? D.h. nur endlich viele, sagen wir $a_1, \dots, a_{n_0-1}$ liegen nicht drin und alle $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$ liegen drin. Und dies passiert für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. wir finden immer ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit dieser Eigenschaft, das ab da alle Glieder in der $\varepsilon$-Umgebung von $A$ liegen. Dann nähert sich doch die *ganze* Folge dem Wert $A$ an. So z.B. im Falle von $a_n = \frac{1}{n}$. Wir sagen dann, dass die Folge konvergiert und $A$ der Grenzwert ist.

**Definition 1.6.4.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge und $A \in \mathbb{R}$. $A$ heißt Grenzwert von $a_n$, d.h.*

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} A \qquad \textit{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

*wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.*

Anstelle von $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ können wir auch $|a_n - a| < \varepsilon$ schreiben.

**Beispiel 1.6.5.** Schauen wir uns $a_n = \frac{1}{n^2}$ an. Wir vermuten, dass

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gilt, d.h. die Folge konvergiert gegen $A = 0$. Wie muss dann $n_0(\varepsilon)$ aussehen? Wir wollen haben:

$$\frac{1}{n^2} \in (-\varepsilon, \varepsilon), \tag{$*$}$$

d.h.

$$-\varepsilon < \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Da $0 < \frac{1}{n^2}$ gilt, haben wir

$$0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Mal $n^2$ und durch $\varepsilon$ bekommen wir

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2$$

und Wurzel ziehen liefert

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n.$$

Wählen wir also

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1,$$

die $+1$ als Sicherheit, dann haben wir $(*)$ sichergestellt für all $n \geq n_0(\varepsilon)$.

**Aufgabe 1.6.6.** Sei $a_n = -1 + \frac{1}{n^3}$. Finden Sie den Grenzwert $a_n \to A$ und beweisen Sie ihn, indem Sie für jedes $\varepsilon > 0$ das $n_0(\varepsilon)$ bestimmen.

## Rechnen mit Grenzwerten von Folgen

Wir haben nun also gesehen, wie wir für einzelne (einfache) Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Grenzwerte bestimmen können. Um kompliziertere Folgen zu untersuchen, zerlegen wir sie in einfachere, uns bekannte Folgen. Dazu hilft uns das folgende Theorem, welches wir aus der Vorlesung kennen.

**Theorem 1.6.7.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten*

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \qquad \text{und} \qquad b_n \xrightarrow{n\to\infty} b.$$

*Dann gilt*

*a)* $a_n + b_n \to a + b$,

*b)* $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$,

*c) Wenn* $b \neq 0$, *dann* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

In b) ist es notwendig, dass beide Werte endlich sind.

**Beispiel 1.6.8.** Wir wissen, dass

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gilt. Damit folgt aus b)

$$\frac{1}{n^k} = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}}_{k\text{-mal}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Also mit a) auch

$$1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1 + 0 + 0 = 1.$$

Wenn wir nun noch c) mit dazu nehmen, können wir den Grenzwert

$$\frac{n^4 - n^2 + 3}{3n^4 + 5n^3 + 2} = \frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^4}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^4}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{1}{3}$$

ausrechnen, indem wir in dem Bruch im Zähler und im Nenner $n^4$ ausklammern und kürzen ($\frac{n^4}{n^4} = 1$).

Als kleinen Spezialfall, den wir in der Vorlesung bald behandeln und verallgemeinern werden, haben wir folgende Aussage.

**Theorem 1.6.9.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit*

$$a_n \to a \neq 0 \qquad \text{und} \qquad b_n \to \infty.$$

*Dann gilt*

$$a_n \cdot b_n \to \operatorname{sign}(a) \cdot \infty,$$

*wobei $(a)$ das Vorzeichen von $a$ ist.*

Sei z.B. $a_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ und $b_n = n \to \infty$, dann gilt

$$a_n \cdot b_n \to \infty.$$

Damit können wir nun auch Brüche behandeln, in denen der Zähler von größerer Potenz ist als der Nenner:

$$\frac{3n^2 - 1}{n + 5} = \frac{n^2}{n} \cdot \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n}} = n \cdot \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n}} \to \infty \cdot 3 = \infty.$$

**Aufgabe 1.6.10.** Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Folgen.

**a)** $a_n = \dfrac{n^{17} - 9}{n^2 + 2}$,

**b)** $b_n = \dfrac{n^{17} - 9}{4n^{17} + n^4 - n^3 + 2}$,

**c)** $c_n = 3 - \dfrac{3n^3 - 9}{n^3 + 2}$.

Wir können jetzt also Grenzwerte von der Art

$$a + b, \qquad a \cdot b, \qquad \frac{a}{b}\ (b \neq 0) \qquad \text{und} \qquad a \cdot \infty\ (a \neq 0)$$

behandeln. Wir werden uns dann auch mit den wohl wichtigsten Fällen

$$0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \text{und} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

in kürze befassen.

## Bestimmte Divergenz

Bisher haben wir (meist) Folgen betrachtet, die konvergieren, d.h. gegen einen festen *endlichen* Wert streben. Aber wenn wir uns nur mal die Folge

$$a_n = n$$

anschauen, dann sehen wir, dass für $n \to \infty$ natürlich auch $a_n \to \infty$ geht. Wir wollen jetzt mal formal beschreiben, was

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

eigentlich bedeutet.

Nunja, bildlich gesehen heißt $a_n \to \infty$ ja nichts weiter als das für ansteigende $n$ auch die $a_n$ wachsen und war nicht nur wachsen, sondern sogar über alle Grenzen wachsen, d.h. jeden vorgegeben Wert $C \in \mathbb{N}$ überschreiten. Für $a_n = n$ können wir so jedes $C \in \mathbb{N}$ vorgeben, z.B. $C = 2$, 100, 12345 oder $10^{82}$ (das ist die geschätzte Anzahl der Elementarteilchen im ganzen Universum). Aber egal welches $C$ wir wählen, die Folge $a_n = n$ übersteigt diesen Wert. Das wollen wir darunter verstehen wenn wir $a_n \to \infty$ schreiben.

**Definition 1.6.11.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Wir sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$* divergiert bestimmt (gegen $\infty$) *wenn für jedes $C \in \mathbb{N}$ ein $N_0(C)$ existiert mit*

$$a_n \geq C \qquad \textit{für alle } n \geq N_0(C).$$

**Beispiel 1.6.12.** Gehen wir zurück zum Beispiel $a_n = n$ und wir wollen wirklich mit dieser Definition zeigen, dass $a_n \to \infty$ (also jeden Wert $C \in \mathbb{N}$ überschreitet). Sei also $C \in \mathbb{N}$. Wir wollen $N_0(C)$ finden. Also müssen wir

$$a_n = n \geq C$$

für alle $n \geq N_0(C)$ haben. Wählen wir hier $N_0(C) = C$, dann haben wir

$$a_n = n \geq C \qquad \text{für alle } n \geq N_0(C) = C.$$

Also genau, was wir haben wollten.

**Beispiel 1.6.13.** Schauen wir uns ein zweites Beispiel an. Sei $b_n = n^2$. Wir wollen zeigen, dass $b_n \to \infty$ gilt. Für ein $C \in \mathbb{N}$ muss also

$$b_n = n^2 \geq C$$

für alle $n \geq N_0(C)$ gelten. Wir haben wir $N_0(C)$ zu wählen? Eine Nebenrechnung liefert wieder

$$b_n = n^2 \geq C \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \sqrt{C}$$

gilt. Wähle also $N_0(C) = \sqrt{C}$. Dann haben wir

$$n \geq N_0(C) = \sqrt{C} \qquad \Rightarrow \qquad b_n = n^2 \geq C$$

und wir haben damit $b_n \to \infty$ bewiesen.

**Aufgabe 1.6.14.** Zeigen Sie $a_n \to \infty$ für $a_n = n^2 + n$.

Ein bisschen schwieriger wird die folgende Abschätzung.

**Aufgabe 1.6.15.** Sei $b_n = n^2 - n$. Zeigen Sie $b_n \to \infty$.

Wir verstehen dann natürlich unter $a_n \to -\infty$, dass $-a_n \to \infty$ geht.

## Nützliche Konvergenzkriterien

Bisher haben wir Konvergenzen von einfachen Folgen wie z.B. $\frac{1}{n^k}$ kennen gelernt. Wir wollen nun die Anzahl der Möglichkeiten Grenzwerte zu bestimmen erweitern um auch komplizierte Folgen zu behandeln.

### Polizistenregel bzw. Sandwich-Theorem

Nehmen wir an, wir haben eine komplizierte Folge $a_n$ gegeben. Durch "scharfes Hinschauen" finden wir aber zwei einfachere Folgen $b_n$ und $c_n$ mit

$$b_n \leq a_n \leq c_n$$

für alle $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Wir sehen den beiden Folgen $b_n$ und $c_n$ aber auch an, dass

$$b_n \to a \qquad \text{und} \qquad c_n \to a$$

für ein $a \in \mathbb{R}$ oder $a = +\infty$ oder $a = -\infty$ gilt. Was können wir dann über $a_n$ aussagen?

Was hier passiert, hat uns unser Analysisprof in Leipzig im ersten Semester so geschildert. Stellen Sie sich vor Sie laufen auf dem Gehweg so dahin. Auf einmal kommt ein Polizist von links und hackt sie unterm Arm ein. Und dann kommt auch noch ein zweiter

Polizist von rechts und hackt Sie unterm Arm ein. Beide Polizisten gehen ins Gefängnis. Raten Sie mal, wo Sie hingehen!

Genau! Sie armes Schwein gehen ins Gefängnis. Sie gehen nicht über Los und ziehen aus keine 2000DM (bzw. Euro) ein.[4]

Kommen wir zur Folge $a_n$ zurück, so sehen wir spätestens nun, dass auch $a_n \to a$ gilt:

$$\begin{array}{ccccc} b_n & \leq & a_n & \leq & c_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & & ? & & a \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} a_n \\ \downarrow \\ a \end{array}.$$

**Beispiel 1.6.16.** Sei $a_n = \frac{1}{n^3+n^2-n-1}$. Dann gilt für $n \geq 2$: $n^3 \geq n^2 - n - 1 \geq 0$, also

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2n^3} & \leq & a_n = \frac{1}{n^3+n^2-n-1} & \leq & \frac{1}{n^3} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & ? & & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} a_n = \frac{1}{n^3+n^2-n-1} \\ \downarrow \\ 0 \end{array}.$$

In einfachsten Falle haben wir $a_n \geq 0$ und vermuten $a_n \to 0$. Dann brauchen wir natürlich nur die obere Folgenschranke $c_n$ finden:

$$0 \leq a_n \leq c_n \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_n \to 0.$$

**Aufgabe 1.6.17.** Zeigen mit Hilfe der Polizistenregel $a_n = \frac{9}{n^2 - n\cdot\sin(2n^2)} \to 0$.

Darüber hinaus haben wir damit auch gleich die Fälle aus der Vorlesung

$$\begin{array}{ccc} a_n & \leq & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \leq & b \end{array}.$$

Ist hier $a = +\infty$ so impliziert dies auch $b_n \to b = \infty$. Anderes herum folgt aus $b = -\infty$ auch $a_n \to -\infty$.

### Quotientenkriterium I: Konvergenz $\to 0$

Wir kennen auch schon die Folgen

$$q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{für} \qquad |q| < 1$$

und

$$q^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \qquad \text{für} \qquad q > 1.$$

Haben wir eine Folge $a_n$ gegeben und wir finden ein $C > 0$ und ein $q \in (0, 1)$ mit

$$|a_n| \leq C \cdot q^n$$

[4] Man muss dazu wissen, dass dieser Begriff "Polizistenregel" noch aus Ostzeiten stammt, wo es leider durchaus solche Szenen auf der Straße geben hat. Der Begriff Sandwich kommt von den beiden Toastscheiben die die Wurst/Käse/Salat umschließen. Leider laufen Toastscheiben nicht irgendwo hin, was so ein bisschen das Prinzip vermissen lässt.

dann gilt

$$0 \leq |a_n| \leq C \cdot q^n \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_n \to 0$$

wie wir hier oben an der Polizistenregel gesehen haben.

Aber wie bekommen wir so ein $q \in (0,1)$?

Angenommen $|a_n| > 0$ für alle, dann können wir uns

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

anschauen. Zudem schauen wir uns

$$l := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

an. Wenn $l \in [0,1)$ gilt, dann gibt es nach der Grenzwertdefinition ein $n_0(\varepsilon)$ mit

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq l + \varepsilon \tag{$*$}$$

für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Dann können wir auch $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$ setzten, d.h. $l + \varepsilon < 1$. Dann impliziert $(*)$ aber auch für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ das folgende:

$$|a_{n+1}| \leq (l+\varepsilon) \cdot |a_n|$$

und somit mit Induktion wir bekommen

$$|a_{n_0+n}| \leq (\underbrace{l+\varepsilon}_{\in(0,1)})^n \cdot |a_{n_0}| \quad \to \quad 0.$$

Damit haben wir das folgende gezeigt.

**Theorem 1.6.18** (Quotientenkriterium I)**.** *Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$[5] und*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q \in [0,1).$$

*Dann gilt $a_n \to 0$.*

**Aufgabe 1.6.19.** Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

**a)** $a_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$,

**b)** $b_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$,

**c)** $c_n = 3 - \left(\frac{1}{n}\right)^n$.

[5] Oder für alle $n \geq n_0$

### Quotientenkriterium II: bestimmte Divergenz $\to \infty$

Das Quotientenkriterium I deckt also den Fall

$$q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{für} \qquad |q| < 1$$

ab. Schauen wir uns nun den zweiten Fall

$$q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \text{für} \qquad q > 1$$

an.

Für $q > 1$ haben wir $q^n \to \infty$ für $n \to \infty$. Haben wir nun eine Folge $a_n \neq 0$ gegeben mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q > 1$$

so finden wir nach Grenzwertdefinition für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q - \varepsilon.$$

Da $q > 1$ ist, können wir $\varepsilon$ so klein wählen, dass immer noch $q - \varepsilon > 1$ gilt. Dann haben wir

$$a_{n_0+n} > (q-\varepsilon)^n \cdot a_{n_0} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Damit haben wir das folgende bewiesen.

**Theorem 1.6.20** (Quotientenkriterium II)**.** *Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} q > 1.$$

*Dann gilt $a_n \to \infty$.*

Bemerke, dass hier auch $q = \infty$ erlaubt ist, denn natürlich haben wir immer $\infty > 1$.

**Aufgabe 1.6.21.** Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

**a)** $a_n = 2 \cdot 3^n$,

**b)** $b_n = \frac{3^n}{n^3}$,

**c)** $c_n = \frac{n!}{4^n}$.

### Wurzelkriterium und Ausblicke

Die Quotientenkriterien I und II basieren also auf

$$q^n \to 0 \qquad \text{für} \qquad |q| < 1$$

und

$$q^n \to \infty \qquad \text{für} \qquad q > 1.$$

Damit hatten wir die Schranken

$$|a_n| \leq C \cdot q^n \to 0 \qquad \text{für} \qquad q \in [0,1)$$

für Nullfolgen und

$$a_n \geq C \cdot q^n \to \infty \qquad \text{für} \qquad q > 1 \tag{$*$}$$

für bestimmt divergente Folgen. An die $q$'s kommen wir aber nicht nur durch den Quotienten ran, sondern auch mit

$$q = \sqrt[n]{q^n} \tag{$**$}$$

d.h. auch durch Wurzelziehen.

**Theorem 1.6.22** (Wurzelkriterium)**.** *Sei $a_n > 0$ und es existiere*

$$\sqrt[n]{a_n} \to q.$$

*Für $q \in [0,1)$ ist $a_n$ eine Nullfolge: $a_n \to 0$. Für $q > 1$ ist $a_n$ bestimmt divergent: $a_n \to \infty$.*

Der Beweis ist ähnlich wie für die Quotientenkriterien.

Neben den hier beschrieben Methoden gibt es noch weitere. In der Vorlesung wurde der Satz zur monotonen Konvergenz besprochen. Dann gibt es noch das Cauchy Konvergenzkriterium. Es soll aber erstmal bei den hier und in der Vorlesung besprochenen Kriterien bleiben.

Alle diese Kriterien werden wir wieder sehen, wenn wir nicht nur Folgen, sondern Reihen (= unendliche Summen)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{\#}$$

betrachten werden. Um mal ein wenig vorzugreifen wozu wir das hier alles machen. Wenn wir die Summe in (#) haben so gibt es für $|q| < 1$ einen Fun Fact:

$$1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} < \infty$$

und wir können ($*$) nutzen um zu zeigen, dass die Summe endlich ist. Aber dazu Später mehr.

## Polynomielles vs. exponentielles Wachstum

Abschließend noch ein paar Worte zu Folgen der Art

$$a_n = \frac{\text{Polynom in } n}{\text{Polynom in } n}.$$

Da es sich herbei um (Quotienten von) Polynomen handelt, tritt hier polynomielles Wachstum (negativ Wachstum = Abfall[6]) auf. Dafür sind die Methoden die wir hier schon gesehen haben geeignet.

[6] $\neq$ Müll

Hier haben wir uns insbesondere mit Folgen der Art

$$q^n$$

beschäftigt, insbesondere für $q > 0$. Hier liegt ein exponentielles Wachstum[7] vor, wie wir leicht an

$$q^n = e^{n\cdot\ln q}$$

sehen können. Für $\ln q > 0$ wächst die Folge exponentiell, für $\ln q < 0$ fällt sie exponentiell. Daher auch die Quotientenkriterien I und II für $|q| < 1$ und $q > 1$. Das sind genau die beiden Fälle für den ln:

$$q \in (0,1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln q < 1$$

und

$$q > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln q > 1.$$

Exponentielles Wachstum lässt sich nicht mit dem Methoden des polynomiellen Wachstums untersuchen und umgekehrt. Insbesondere kann für $q = 1$ keine Aussage über die Konvergenz von $a_n$ getroffen werden wie wir in der letzten Aufgabe für heute sehen werden.

**Aufgabe 1.6.23.** Finden Sie Folgen $a_n > 0$ mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

und

**a)** $a_n \to 0$,

**b)** $a_n \to 1$,

**c)** $a_n \to \infty$.

[7]Für gewöhnlich würde ich noch ein paar Beispiele zum exponentiellen Wachstum bzw. Abfall besprechen/geben. Aber ich glaube wir sind uns alle bewusst, dass wir uns gerade selbst in einem großen Beispiel von exponentiellen Wachstum bzw. hoffentlich Abfall befinden.

# Lösungen

## Komplexe Zahlen*

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.1)**.** Seien

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 16 + 4i \qquad \text{und} \qquad z_3 = 7 - 3i$$

gegeben. Dann haben wir:

a) $z_1 + z_2 = (1 + i) + (16 + 4i) = (1 + 16) + (1 + 4)i = 17 + 5i$,

b) $z_1 + z_3 = (1 + i) + (7 - 3i) = (1 + 7) + (1 - 3)i = 8 - 2i$,

c) $z_1 - z_2 = (1 + i) - (16 + 4i) = (1 - 16) + (1 - 4)i = -15 - 3i$,

d) $z_2 - z_3 = (16 + 4i) - (7 - 3i) = (16 - 7) + (4 + 3)i = 9 + 7i$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.2)**.** Seien

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 3 - 2i \qquad \text{und} \qquad z_3 = -1 + i$$

gegeben. Wir nutzen hier immer $i^2 = -1$. Dann haben wir:

a) $z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(3 - 2i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2i) + 3i - 2i^2 = 3 + 2 + i = 5 + i$,

b) $z_1 \cdot z_3 = (1 + i)(-1 + i) = 1 \cdot (-1) + i - i - 1 = -2$,

c) $z_2 \cdot z_3 = (3 - 2i)(-1 + i) = 3 \cdot (-1) + 3i + 2i + 2 = -1 + 5i$,

d) $z_2 \cdot z_1 = z_1 \cdot z_2 = 5 + i$ nach a),

e) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = -2 + (-1 + 5i) = -3 + 5i$ mit b) und c),

f) $z_1 \cdot (z_2 - z_3) = z_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot z_3 = (5 + i) - (-2) = 7 + i$ mit a) und b) oder direkt $z_1 \cdot (z_2 - z_3) = (1 + i) \cdot (3 - 2i - (-1 + i)) = (1 + i)(4 - 3i) = 4 - 3i + 4i - 3i^2 = 7 + i$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.3)**.** Seien

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 3 - 4i \qquad \text{und} \qquad z_3 = -2 + 2i$$

gegeben. Wir haben:

a) $\overline{z_1} = \overline{1 + i} = 1 - i$,

b) $\overline{z_2} = \overline{3 - 4i} = 3 + 4i$,

c) $\overline{z_3} = \overline{-2 + 2i} = -2 - 2i$,

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 - i + 3 + 4i = 4 + 3i$,

e) $\overline{z_1 - z_3} = \overline{z_1} - \overline{z_3} = 1 - i - (-2 - 2i) = 3 + i$,

f) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (1 - i)(3 + 4i) = 3 + 4i - 3i + 4 = 7 + i$,

g) $\overline{z_1} \cdot z_2 = (1-i)(3-4i) = 3-4i-3i-4 = -1-7i$,

h) $(\overline{z_2}-z_3)\cdot\overline{(z_1+z_3)} = (3+4i-(-2+2i))\cdot\overline{(1+i+(-2+2i))} = (5+2i)\cdot\overline{(-1+3i)} = (5+2i)(-1-3i) = -5-15i-2i+6 = 1-17i$,

i) $\overline{z_1}\cdot(z_2+z_3)\cdot(z_1-\overline{z_2}) = (1-i)(3-4i-2+2i)(1+i-3-4i) = (1-i)(1-2i)(-2-3i) = (1-2i-i-2)(-2-3i) = (-1-3i)(-2-3i) = 2+3i+6i-9 = -7+9i$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.4)**.** Seien

$$z_1 = 1+i \qquad \text{und} \qquad z_2 = 2-3i$$

gegeben. Wir haben:

a) $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$,

b) $|z_2| = \sqrt{2^2+3^3} = \sqrt{13}$,

c) $|\overline{z_1}| = |z_1| = \sqrt{2}$,

d) $|z_1\cdot\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{13} = \sqrt{26}$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.5)**.** Seien

$$z_1 = 2+i, \qquad z_2 = -1+2i \qquad \text{und} \qquad z_3 = 3+2i$$

gegeben. Wir haben:

a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2+i}{-1+2i} = \dfrac{(2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \dfrac{-2-4i-i+2}{1^2+2^2} = \dfrac{-5i}{5} = -i$,

b) $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{-1+2i}{3+2i} = \dfrac{(-1+2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{-3+2i+6i+4}{3^2+2^2} = \dfrac{1+8i}{13}$,

c) $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i}{2^2+1^2} = \dfrac{2-i}{5}$,

d) $\dfrac{z_3}{z_1\cdot z_2} = \dfrac{3+2i}{(2+i)(-1+2i)} = \dfrac{3+2i}{-2+4i-i-2} = \dfrac{3+2i}{-4+3i} = \dfrac{(3+2i)(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)} = \dfrac{-12-9i-8i+6}{4^2+3^2} = \dfrac{-6-17i}{25}$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.7)**.** Wir haben:

a) $\exp(-7+\pi i/4) = e^{-7}\cdot(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = e^{-7}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

b) $\exp(1-3i\pi) = e\cdot e^{-3i\pi} = e\cdot(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)) = -e$,

c) $|\exp(-7+19\pi i/8)| = |e^{-7}\cdot e^{19\pi i/8}| = e^{-7}\cdot\sqrt{\cos^2 a+\sin^2 a} = e^{-7}$ mit $a = 19\pi i/8$,

d) $\overline{\exp(-8+\pi i/4)} = \overline{\exp(-8)\cdot(\cos a + i\sin a)} = \exp(-8)\cdot(\cos a - i\sin a) = \exp(-8)\cdot(\cos(-a)+i\sin(-a)) = \exp(-8-\pi i/4)$ mit $a = \pi i/4$,

e) $\exp(\pi i/4) = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1+i\cdot 1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

f) $\exp(\pi i/2) = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i\cdot 1 = i$,

g) $\exp(3\pi i/4) = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$,

h) $\exp(\pi i) = \cos\pi + i\sin\pi = -i$,

i) $\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$,

j) $\exp(z + n\pi i)$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}$:
$$\exp(z+n\pi i) = \exp(z)\cdot\exp(n\pi i) = \exp(z)\cdot\exp(\pi i)^n = \exp(z)\cdot(-1)^n,$$

k) $\exp(z + 2n\pi i)$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}$:
$$\exp(z+2n\pi i) = \exp(z)\cdot\exp(2\pi i)^n = \exp(z)\cdot 1^n = \exp(z),$$

l) $|\exp(i\varphi)|$ für $\varphi \in \mathbb{R}$:
$$|\exp(i\varphi)| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.8)**.** Wir berechnen für die angegebenen $z$ die Werte für $r = |z|$ in der Polardarstellung.

a) $z = 1+2i$: $r = |z| = \sqrt{1^1 + 2^2} = \sqrt{5}$,

b) $z = 2-3i$: $r = |z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

c) $z = 5i$: $r = |z| = 5$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.9)**.** Wir bestimmen für die in Aufgabe 1.3.8 angegebenen $z \in \mathbb{C}$ die Winkel $\varphi$.

a) Wir haben $\arctan\frac{b}{a} = \arctan\frac{2}{1} \approx 63.43°$. Da $1+2i$ im ersten Quadranten liegt, gilt $\varphi \approx 63.42°$.

b) Wir haben $\arctan\frac{b}{a} = \arctan\frac{-3}{2} \approx 123.69°$. Da $2-3i$ aber im dritten Quadranten liegt, gilt $\varphi \approx 303.69° = -56.31°$.

c) Zeichnet man $i$ im Koordinatensystem ein, sieht man sofort, dass $i$ einen Winkel von $90° = \pi/2$ einschließt. Daher haben wir ohne Rechnen sofort $i = e^{i\pi/2}$, eine Formel, die es sich auch lohnt zu merken. Wir haben also $\varphi = \pi/2$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.3.10)**.** Wir haben die folgenden Potenzen:

a) $(1+i)^{1/2} = (2^{1/2}\cdot e^{i\pi/4})^{1/2} = 2^{1/4}\cdot e^{i\pi/8}$,

b) $(-1+i)^i = (\sqrt{2}\cdot e^{3i\pi/4})^i = (e^{(\ln 2)/2}\cdot e^{3i\pi/4})^i = (e^{(\ln 2)/2 + 3i\pi/4})^i = e^{i(\ln 2)/2 - 3\pi/4}$,

c) $(2-2i)^{10938} = (2^{3/2}\cdot e^{-i\pi/4})^{10938} = 2^{3\cdot 10938/2}\cdot e^{-i\pi/4\cdot 10938} = 2^{16407}\cdot e^{-i\pi\cdot 2734.5} = 2^{16407}\cdot e^{-i\pi/2 - i\pi\cdot 2734} = 2^{16407}\cdot e^{-i\pi/2}\cdot (e^{-i\pi})^{2734} = 2^{16407}\cdot(-i)\cdot(-1)^{2734} = -2^{16407}\cdot i$.

In a) und b) verzichten wir auf die Angabe als $a+bi$. Nur in c) kommen wir wieder auf eine einfache $a+bi$-Darstellung.

## Ungleichungen und Beträge*

**Lösung** (von Aufgabe 1.4.2)**.**

**a)** $3x - 8 > 4$:

$$\begin{aligned} 3x - 8 &> 4 && \mid +8 \\ 3x &> 12 && \mid \div 3 \\ x &> 4 \\ \text{Lösungsmenge: } &\underline{\underline{x \in (4, \infty)}}. \end{aligned}$$

**b)** $-2x + 3 \geq x - 1$:

$$\begin{aligned} -2x + 3 &\geq x - 1 && \mid -3-x \\ -3x &\geq -4 && \mid \div (-3) \\ x &\leq \frac{4}{3} \\ \text{Lösungsmenge: } &\underline{\underline{x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right]}} \end{aligned}$$

**Lösung** (von Aufgabe 1.4.4)**.**

**a)** $|2x - 3| < 1$:

$$\begin{aligned} |2x - 3| &< 1 && \mid |\cdot| \text{ auflösen} \\ -1 < 2x - 3 &< 1 && \mid +3 \\ 2 < 2x &< 4 && \mid \div 2 \\ 1 < x &< 2 \\ \text{Lösungsmenge: } &\underline{\underline{x \in (1, 2)}} \end{aligned}$$

**b)** $|4x - 5| > 2$:

$$\begin{aligned} |4x - 5| &> 2 && \mid |\cdot| \text{ auflösen} \\ i)\ 4x - 5 &> 2 && \text{(erster Fall)} \\ ii)\ -(4x - 5) &> 2 && \text{(zweiter Fall)} \end{aligned}$$

Wir haben also beim Auflösen zwei Fälle bekommen. Die möglichen $x \in \mathbb{R}$ müssen mindestens einen erfüllen. Wir betrachten die beiden Fälle getrennt: Fall i)

$$\begin{aligned} 4x - 5 &> 2 && \mid +5 \\ 4x &> 7 && \mid \div 4 \\ x &> \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Fall ii)

$$\begin{aligned} -(4x-5) &> 2 \\ -4x+5 &> 2 && \mid -5 \\ -4x &> -3 && \mid \div(-4) \\ x &< \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Wir haben also, dass $x$ entweder Fall i) $x > \frac{7}{4}$ oder Fall ii) $x < \frac{3}{4}$ erfüllen muss. Die Lösungsmenge ist daher

$$\underline{\underline{x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{4}, \infty\right) = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right]}}.$$

**c)** $x^2 < 4x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 &< 4x-3 && \mid -4x+4 \\ x^2-4x+4 &< 1 \\ (x-2)^2 &< 1 && \mid \sqrt{\cdot} \\ |x-2| &< 1 && \mid |\cdot| \text{ auflösen} \\ -1 < x-2 &< 1 && \mid +2 \\ 1 < x &< 3 \\ \text{Lösungsmenge: } & \underline{\underline{x \in (1,3)}} \end{aligned}$$

Hier sehen wir also, das obwohl die Anfangsungleichung keine Beträge enthält, das Lösen der quadratischen Gleichung liefert Beträge durch das Wurzelziehen.

## Vollständige Induktion*

**Lösung** (von Aufgabe 1.5.1)**.** Wir zeigen mittels vollständiger Induktion:

**a)** Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>IA:</u> Sei $n = 1$, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4},$$

d.h. für $n = 1$ stimmt die Aussage.

<u>IS ($n \to n+1$):</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4},
\end{aligned}$$

d.h. für $n+1$ stimmt die Aussage ebenfalls.

**b)** Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>IA:</u> Sei $n = 1$, dann gilt

$$3 \cdot 1 - 2 = 1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{2}$$

d.h. für $n = 1$ stimmt die Aussage.

<u>IS $(n \to n+1)$:</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (3k-2) &= \sum_{k=1}^{n} (3k-2) + 3(n+1) - 2 \\
&= \frac{n \cdot (3n-1)}{2} + 3n + 1 \\
&= \frac{n \cdot (3n-1) + 6n + 2}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 2n + 5n + 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{2},
\end{aligned}$$

d.h. für $n+1$ stimmt die Aussage ebenfalls.

**c)** Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

für alle $n \geq 2$.

<u>IA:</u> Sei $n = 2$, dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1.7 > 1.5 > \sqrt{2}$$

d.h. für $n = 2$ stimmt die Aussage.

<u>IS $(n \to n+1)$:</u> Wir machen die Nebenrechnung

$$1 > 0 \quad \Rightarrow \quad n+1 > n \qquad \Big| \cdot n$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad n(n+1) > n^2 && |\sqrt{\cdot}\\
&\Rightarrow \quad \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} > n && |+1\\
&\Rightarrow \quad \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1 > n+1 && |\div\sqrt{n+1}\\
&\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

und erhalten somit

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{IV}}{>} \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

d.h. die Aussage stimmt auch für $n+1$.

## Folgen

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.3)**.** Wir bestimmen die Häufungspunkte der folgenden Folgen.

**a)** $a_n = -2 + \frac{1}{n^2}$. Dann nähert sich $\frac{1}{n^2}$ der 0 an, und auch nur der 0, und kein Wert wird mehrfach angenommen (insbesondere nicht unendlich oft). D.h. $\frac{1}{n^2}$ hat den Häufungspunkt 0. Damit hat aber $a_n = -2 + \frac{1}{n^2}$ den Häufungspunkt $-2$.

**b)** $b_n = (-1)^n - \frac{1}{n^4}$. Wie in a) hat $\frac{1}{n^4}$ den einzigen Häufungspunkt 0. Und $(-1)^n$ ist für gerade $n$ gleich 1 und für ungerade $n$ gleich $-1$. Für ungerade $n$ nähert sich $b_n$ also der $-1$ an und für gerade $n$ nähert sich $b_n$ der $+1$ an. Wir haben also die beiden Häufungspunkte $-1$ und $+1$.

**c)** $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Wie in b) nähert sich $c_n$ für gerade $n$ der 0 an und für ungerade $n$ nähert sich $c_n$ auch der 0 an. Wir haben also nur den Häufungspunkt 0.

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.6)**.** Sei $a_n = -1 + \frac{1}{n^3}$. Wir vermuten, da $-1$ konstant ist und $\frac{1}{n^3}$ für $n\to\infty$ gegen 0 geht, dass

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} -1.$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Wir wollen

$$|-1 - a_n| < \varepsilon$$

haben. Also

$$\left|-1 - \left(-1 + \frac{1}{n^3}\right)\right| < \varepsilon$$

und damit

$$\frac{1}{n^3} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} < n.$$

Wir vermuten also wieder

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}} + 1.$$

Sei also $n \geq n_0(\varepsilon)$. Wir testen:

$$\left|-1 - \left(-1 + \frac{1}{n^3}\right)\right| = \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n_0(\varepsilon)^3} = \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}+1)^3} < \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}})^3} = \varepsilon.$$

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.10)**.** Wir bestimmen die Grenzwerte folgender Folgen.

**a)** $a_n = \dfrac{n^{17}-9}{n^2+2} = \dfrac{n^{17}}{n^2} \cdot \dfrac{1-\frac{9}{n^{17}}}{1+\frac{2}{n^2}} = n^{15} \cdot \dfrac{1-\frac{9}{n^{17}}}{1+\frac{2}{n^2}} \to \infty \cdot 1 = \underline{\underline{\infty}},$

**b)** $b_n = \dfrac{n^{17}-9}{4n^{17}+n^4-n^3+2} = \dfrac{n^{17}}{n^{17}} \cdot \dfrac{1-\frac{9}{n^{17}}}{4+\frac{1}{n^{13}}-\frac{1}{n^{14}}+\frac{2}{n^{17}}} \to \underline{\underline{\dfrac{1}{4}}},$

**c)** $c_n = 3 - \dfrac{3n^3-9}{n^3+2} = 3 - \dfrac{n^3}{n^3} \cdot \dfrac{3-\frac{9}{n^3}}{1+\frac{2}{n^3}} \to 3-3 = \underline{\underline{0}}.$

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.14)**.** Da $a_n = n^2 + n$ aus $n^2 \to \infty$ und $n \to \infty$ zusammen gesetzt ist mit Addition, können wir schon vermuten, dass auch $a_n \to \infty$ gilt. Sei nun aber $C \in \mathbb{N}$. Wir wollen

$$a_n = n^2 + n \geq C$$

für alle $n \geq N_0(C)$ für ein $N_0(C)$ haben. Dann haben wir aber

$$a_n = n^2 + n \geq n \geq C$$

und wir können $N_0(C) = C$ wählen. Gehen wir nun also von der bisherigen Nebenrechnung zum Beweis:

Wähle $N_0(C) = C$. Dann gilt

$$a_n = n^2 + n \geq n \geq C$$

für alle $n \geq N_0(C)$ und somit $a_n \to \infty$.

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.15)**.** Wir haben $b_n = n^2 - n$ und somit das Problem, dass $n^2 \to \infty$ aber $-n \to -\infty$ geht. Wir können uns aber vorstellen, dass $n^2$ stärker wächst als $-n$ fällt, aber wie drücken wir dies mathematisch aus? Machen wir die folgende Nebenrechnung:

$$b_n = n^2 - n = n \cdot (n-1)$$

und wir haben, dass $n - 1 \geq 1$ für alle $n \geq 2$ gilt. Dann können wir die folgende Abschätzung machen:

$$b_n = n^2 - n = n \cdot (n-1) \geq n$$

für alle $n \geq 2$. Wähle nun also $N_0(C) = \max\{C, 2\}$. Dann haben wir

$$b_n = n^2 - n = n(n-1) \geq n \geq N_0(C) \geq C$$

was uns $b_n \to \infty$ beweist.

## Polizistenregel bzw. Sandwich-Theorem

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.17)**.** Aus $a_n = \frac{9}{n^2 - n \cdot \sin(2n^2)} \to 0$ sehen wir, dass $|\sin(2n^2)| \leq 1$ gilt und somit $|n \cdot \sin(2n^2)| \leq n$ und

$$n^2 - n \cdot \sin(2n^2) \geq n^2 - n \geq n^2 - \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n^2 > 0$$

gilt. Somit haben wir

$$0 \leq \frac{9}{n^2 - n \cdot \sin(2n^2)} \leq \frac{9}{\frac{1}{2}n^2} = \frac{18}{n^2} \to 0.$$

Also $a_n \to 0$.

## Quotientenkriterium I: Konvergenz $\to 0$

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.19)**.** Wir die Grenzwerte folgender Folgen mit dem Quotientenkriterium I:

**a)** $a_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|\left(\frac{-1}{4}\right)^{n+1}\right|}{\left|\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right|} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} = q.$$

Da $q = \frac{1}{4} \in [0,1)$ liegt, folgt aus dem Quotientenkriterium I $a_n \to 0$.

**b)** $b_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$: Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir $\frac{n-1}{2n+1} \geq 0$ und $\frac{n-1}{2n+1} \to \frac{1}{2}$. Es gibt daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{3}{4}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt mit der Polizistenregel

$$b_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Aber wie in a) folgt aus dem Quotientenkriterium I dann $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ und somit $b_n \to 0$.

Wir mussten hier also sowohl die Polizistenregel anwenden um eine einfachere Folge $\geq b_n$ finden, die nach dem Quotientenkriterium I gegen 0 strebt. Das mehrere Kriterien/Methoden gleichzeitig angewendet werden müssen, ist bei komplizierteren Folgen meist nicht zu vermeiden.

**c)** $c_n = 3 - \left(\frac{1}{n}\right)^n$: Auf $c_n$ können wir das Quotientenkriterium I nicht sofort anwenden. Wir haben nämlich

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \to 1.$$

Damit können wir nichts anfangen. Wir sehen aber an $c_n$, dass dies die Summe aus einer konstanten Folgen $c'_n = 3$ ist und der Folge $c''_n = -\left(\frac{1}{n}\right)^n$. Wir untersuchen also die Folge $c''_n$: Da für $n \geq 2$ gilt $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ haben wir

$$|c''_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0.$$

Den Grenzwert $\to 0$ haben wir wieder wie in a) mit dem Quotientenkriterium I gezeigt. Damit haben wir aber

$$c_n = 3 - \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 3 - 0 = 3.$$

## Quotientenkriterium II: bestimmte Divergenz $\to \infty$

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.21)**.** Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Folgen:

**a)** $a_n = 2 \cdot 3^n$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3 \to 3 > 1$$

und somit nach Quotientenkriterium II haben wir $a_n \to \infty$.

**b)** $b_n = \frac{3^n}{n^3}$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{3^n}{n^3}} = 3 \cdot \frac{n^3}{(n+1)^3} \to 3 > 1$$

und somit nach Quotientenkriterium II haben wir $b_n \to \infty$.

**c)** $c_n = \frac{n!}{4^n}$:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}}{\frac{n!}{4^n}} = \frac{n+1}{4} \to \infty.$$

Dann haben wir also $q = \infty > 1$ und nach dem Quotientenkriterium II haben wir $c_n \to \infty$.

## Polynomielles vs. exponentielles Wachstum

**Lösung** (von Aufgabe 1.6.23)**.** Wir wollen Folgen $a_n > 0$ mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

finden, für die wir die folgende Konvergenz haben:

**a)** $a_n \to 0$: Wähle

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{oder allgemeiner} \qquad \frac{1}{n^k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} = \frac{n^k}{(n+1)^k} \to 1$$

und $a_n$ ist eine Nullfolge: $a_n \to 0$.

**b)** $a_n \to 1$: Wähle

$$a_n = 1$$

die konstante Folge. Dann gilt natürlich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1} = 1 \to 1 \qquad \text{und} \qquad a_n \to 1.$$

**c)** $a_n \to \infty$: Wähle

$$a_n = n^k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann haben wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{n^k} \to 1$$

mit $a_n$ bestimmt divergent: $a_n \to \infty$.

Dieses Beispiel verdeutlicht also, dass polynomielles Wachstum

$$n^k \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

mit den Methoden des exponentiellen Wachstums nicht behandelt werden können und ein Paradebeispiel für das Problem mit $q = 1$ ist.