Tutorien-/Selbstübungsblatt 3

3.1 Reihen

Jetzt wollen wir uns mit Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{3.1}$$

beschäftigen. Betrachten wir eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so können wir die Reihe (3.1) als Grenzwert der Folge von Partialsummen

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{3.2}$$

und so existiert der Wert von (3.1) genau dann wenn die Folge der Partialsummen (3.2) konvergiert. Auf dem Selbstübungsblatt 4 haben wir uns ja schon intensiv mit Folgen und deren Konvergenz beschäftigt. Das werden wir nun wegen der Beziehung zu/mit den Partialsummen weiter führen bzw. anwenden.

Zuerst aber noch ein paar (hoffentlich) nützliche Hinweise:

(2.a) Ob die Reihe (3.1) konvergiert (und damit auch der Wert), hängt nicht vom "Namen" des Indizes ab. Ob wir in (3.1) also i als Index haben, oder einen anderen Buchstaben ist egal. Er dient ja nur dazu, die Zahlen $1, 2, 3, 4, \dots$ zu durchlaufen. Wichtig ist also, dass wir

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

bekommen, egal mit welchem Indexnamen:[1]

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \dots$$

(2.b) Primär interessieren wir uns, ob die Reihe (3.1) konvergiert. Denn das stellt sicher, ob wir den Wert von (3.1) auch ausrechnen können. Der Wert selbst steht dann an zweiter Stelle. Wenn wir uns dann (3.1) mal auf diese Weise

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{I-1} + \sum_{i=I}^{\infty} a_i$$

anschauen sehen wir, dass die Werte a_1 bis a_{I-1} nur endlich viele sind, und somit die Summe klassisch berechnet werden kann. Die Konvergenz hängt nur von dem "unendlichen Schwanz"

$$\sum_{i=I}^{\infty} a_i \tag{3.3}$$

ab. Wenn also was schief geht, dann in der unendlichen Summe. Daher, wenn wir uns nur für die Konvergenz interessieren, so reicht es uns den unendlichen Schwanz (3.3) anzuschauen. Wir können also, wenn uns das die Arbeit leichter macht, die Reihe (3.1) ab einem Index $I \in \mathbb{N}$ anschauen:

[1] Um das zu üben werden wir immer mal andere Namen für die Indices wählen.

(3.1) konvergiert genau dann wenn (3.3) konvergiert.

Nehmen wir den Betrag der Partialsummen so bekommen wir

$$|S_n| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

und das Interessante daran ist, dann wenn $\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ konvergiert, auch S_n selbst konvergiert. Das nennen wir dann *absolute Konvergenz*. Der Vorteil bei der absoluten Konvergenz ist, dass wir nur Zahlen ≥ 0 addieren und uns nicht um Vorzeichen kümmern müssen oder um andere Effekte bei Summen, also dass sich Terme gegenseitig aufheben. Das ist nämlich sehr schwer zu betrachten. Absolute Konvergenz ist daher unser Lieblingsfall! Wir werden uns hauptsächlich damit beschäftigen.

3.1.1* Konvergenz nach Leibniz

Zuvor wollen wir den einzigen Fall allgemeinen Fall betrachten, der keine absolute Konvergenz ist: Das Leibniz-Kriterium.

Theorem 3.1.1 (Leibniz-Kriterium.). *Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. $a_i \to 0$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot a_i.$$

Beispiel 3.1.2. Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Da $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, so konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

nach dem Leibniz-Kriterium.

Das Leibniz-Kriterium festzustellen ist also relativ einfach ohne zu rechnen (wenn man die Nullfolge sofort sieht).

Ab jetzt schauen wir uns nur noch Kriterien zur absoluten Konvergenz an.

3.1.2 Polizistenregel

Erinnern wir uns an das Tutorienblatt 1, da hatten wir die Polizistenregel für Folgen:

$$\begin{array}{ccccc} b_n & \leq & a_n & \leq & c_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & & ? & & a \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} a_n \\ \downarrow \\ a \end{array}.$$

Diese können wir auf Reihen übertragen:

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergieren} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.}$$

Zudem erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Sollte $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, d.h. $\sum_{n=1}^{N} b_n \to \infty$ gelten, so haben wir damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, also *bestimmte divergenz (gegen $+\infty$)* wie wir sagen.

Und für die absolute Konvergenz tauschen wir b_n, a_n und c_n durch die Beträge $|b_n|$, $|a_n|$ und $|c_n|$ aus:

$$|b_n| \leq |a_n| \leq |c_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \text{ konvergieren} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert.}$$

Da natürlich $|b_n| \geq 0$ ist, können wir als untere Schranke immer 0 als Summe von $b_n = 0$ nehmen. Finden wir dann c_n, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Das nenne wir eine *konvergente Majorante*.

Die mit großem Abstand wichtigste Majorante c_n ist die geometrische Reihe. Sei $q \in [0,1)$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \xrightarrow{N\to\infty} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \in [1,\infty).$$

Sie konvergiert also absolut. Wenn wir also für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ein $q \in [0,1)$ und ein $C \geq 0$ finden mit

$$|a_n| \leq C \cdot q^n, \tag{3.4}$$

dann liefert die Polizistenregel

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq C \cdot \frac{1}{1-q}$$

und somit Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Bemerke dabei auch wieder, dass wir nach der Diskussion oben in (2.b) die Ungleichung (3.4) nur ab einem Index $N \in \mathbb{N}$ sicherstellen müssen. Nur der unendliche Schwanz bestimmt Konvergenz oder Divergenz. Die endlichen Summanden vorher sind in Summe auch immer endlich.

Beispiel 3.1.3. Sei

$$a_n = \left(\frac{3n^2-1}{4n^2+7}\right)^n,$$

dann gilt

$$0 \leq a_n = |a_n| = \left(\frac{3n^2-1}{4n^2+7}\right)^n \leq \left(\frac{3n^2}{4n^2+7}\right)^n \leq \left(\frac{3n^2}{4n^2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

für alle $n \geq 2$. Wir können also $q = \frac{3}{4} \in [0,1)$ wählen und erhalten

$$\sum_{n={\color{red}2}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4.$$

Bemerke, wir starten die Summe hier erst ab $N = 2$ (rot) und fügen in der geometrischen Reihe die Glieder für $n = 0$ und $n = 1$ noch hinzu. Das macht sie Summe rechts größer, aber sie bleibt (glücklicherweise) endlich.

Aufgabe 3.1.4. **a)** Sei $a_n = \left(\frac{5n^3-1}{7n^3+8}\right)^n$. Zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent ist.

b) Sei $b_n = \left(\frac{5n^2+20n+121}{7n^3+8}\right)^n$. Zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent ist.

Das Problem dem wir uns also stellen müssen ist ein geeignetes $q \in [0,1)$ zu finden. Dazu dienen das Quotienten- und das Wurzelkriterium.

3.1.3 Quotientenkriterium

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wir wollen also ein $q \in [0,1)$ finden mit

$$|a_n| \leq C \cdot q^n$$

für alle $n \geq N$, für ein $N \in \mathbb{N}$.

Nehmen wir an, für alle $n \geq N$ gilt $a_n \neq 0$, d.h. $|a_n| > 0$. Schauen wir uns mal

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

an. Angenommen, wir könnten den Grenzwert Q oder wenigstens obere Schranke Q zeigen:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} Q \quad \text{oder} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq Q \text{ für alle } n \text{ groß genug}$$

mit $Q < 1$. Dann können wir ein q mit $Q < q < 1$ wählen und finden auf Grund der Grenzwerte bzw. der Schranke ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$$

für alle $n \geq N$ gilt. Damit erhalten wir aber

$$|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n|$$

für alle $n \geq N$. Also auch

$$|a_{N+k}| < |a_{N+k-1}| \cdot q < |a_{N+k-2}| \cdot q^2 < \cdots < |a_N| \cdot q^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Schauen wir uns damit nun den unendlichen Schwanz an:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_N| \cdot q^k = |a_N| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = |a_N| \cdot \frac{1}{1-q} < \infty.$$

Da der unendliche Schwanz absolut konvergent ist, ist auch die ursprüngliche Reihe konvergent.

Wir haben also das folgende Resultat bewiesen.

Theorem 3.1.5 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Angenommen es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $q \in [0,1)$ mit*

$$a_n \neq 0 \quad \textit{und} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q$$

für alle $n \geq N$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent.

Es ist bestimmt klar, das dieses Kriterium Quotientenkriterium heißt, weil wir uns den Quotienten $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ anschauen.

Beispiel 3.1.6. Sei $a_n = \frac{4\cdot n^3}{n!}$. Dann gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{4\cdot(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{4\cdot n^3}{n!}} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{(n+1)^3}{n^3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \to 0.$$

Damit ist das Quotientenkriterium mit $Q = 0$ erfüllt. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot n^3}{n!}$$

ist somit absolut konvergent.

Aufgabe 3.1.7. Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass folgende Reihen absolut konvergent sind.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{7^k}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\cdot n!}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{3k-1}}{k^3\cdot 5^{4k+1}}$

3.1.4 Wurzelkriterium

Anstelle von

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

können wir auch

$$\sqrt[n]{|a_n|}$$

betrachten. Dabei bemerke (ohne Beweis), dass

$$\sqrt[n]{C} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

für alle $C > 0$ gilt.

Angenommen es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq W$$

für alle $n \geq N$, dann folgt daraus auch

$$|a_n| \leq W^n$$

für alle $n \geq N$. Ist nun $W < 1$ so erhalten wir für den unendlichen Schwanz

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} W^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} W^n = \frac{1}{1-W} < \infty$$

also absolute Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Damit ist das Wurzelkriterium bewiesen:

Theorem 3.1.8 (Wurzelkriterium)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Angenommen es gibt ein $W \in [0,1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq W$$

für alle $n \geq N$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent.

Wir wissen aber auch, dass wenn

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to w \in [0,1)$$

konvergiert, dass ein solches W und N wie im Wurzelkriterium existieren. Es reicht daher, wenn er existiert, den Grenzwert w zu bestimmt (oder wenigsten von oben als < 1 abzuschätzen).

Aufgabe 3.1.9. Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium, dass die folgenden Reihen absolut konvergent sind.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+7}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^{3n-2}$

3.1.5 Bestimmte Divergenz mittels divergenter Minorante

Wir hatten bei der Polizistenregel schon gesehen, dass wenn

$$b_n \leq a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

gilt, dann divergiert auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

bestimmt gegen $+\infty$.

Beispiel 3.1.10. Sei $a_n = \frac{2n^2+2}{3n^3-1}$. Dann gilt

$$a_n = \frac{2n^2+2}{3n^3-1} \geq \frac{2n^2+2}{3n^3-1} \geq \frac{2n^2}{3n^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} =: b_n$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Es reicht dabei natürlich auch aus, dass

$$a_n \geq b_n$$

für alle $n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt. Der unendliche Schwanz divergiert dann, das reicht nach (2.b).

Aufgabe 3.1.11. Finden Sie für jede der Reihen eine divergente Minorante um zu zeigen, dass die Reihen bestimmt divergieren (gegen $+\infty$).

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{2n-1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4+14}{\sqrt[3]{n^4}+4}$

3.1.6* Riemannsche ζ-Funktion

Wir haben gesehen, das konvergente Majoranten und diverente Minoranten sehr hilfreich sind. Neben der geometrischen Reihe gibt es eine weitere wichtige. Das ist die ζ-Funktion (sprich: Zeta-Funktion):

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Für die ζ-Funktion gilt

$$\zeta(x)\begin{cases} < \infty & \text{für } x > 1 \\ = \infty & \text{für } x \in [0,1] \end{cases}.$$

Das wollen wir hier nicht beweisen.

Die ζ-Funktion kann damit als konvergente Majorante oder als divergente Minorante eingesetzt werden.

Beispiel 3.1.12. Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ da dies die ζ-Funktion mit $x = \frac{1}{2}$ ist.

Beispiel 3.1.13. Sei $b_n = \frac{1}{n^2}$, dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ da dies die ζ-Funktion mit $x = 2$ ist.

Weder das Quotientenkriterium noch das Wurzelkriterium sind anwendbar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 1, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \to 1, \quad \sqrt{|b_n|} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1$$

da $\sqrt[n]{n} \to 1$. Nur die ζ-Funktion selbst liefert hier Aussagen. Dahinter steckt das *Cauchy Verdichtungskriterium*: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $a_n \geq 0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

3.2 Stetigkeit

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$.

Definition 3.2.1. *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass die Funktionswerte $f(x)$ bei Annäherung von $x \in D$ an x_0 gegen einen* Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ *streben, in Zeichen*

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} a \qquad \textit{oder} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = a,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

Wir haben in der Vorlesung kennen gelernt, dass f stetig in einem $x_0 \in [a,b]$ heißt, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ die gegen x_0 konvergiert, also $x_n \to x_0$, auch die Konvergenz der Bilder $f(x_n)$ folgt. Und dabei soll auch $f(x_n) \to f(x_n)$ gelten.

Definition 3.2.2. *Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* stetig in $x_0 \in D$, *wenn*

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} f(x_0) \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig (in D), *falls f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.*

Beispiel 3.2.3. Sei $g(x) = \frac{1}{x}$ und $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a = \dfrac{1}{x_0}$.

Um dies zu zeigen sei $1 \gg \varepsilon > 0$, x mit $|x_0 - x| < \varepsilon$ und $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}$, dann gilt $|x_0| \leq 2|x|$ und

$$|g(x) - a| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| \leq \frac{2}{x_0^2} \cdot |x_0 - x| < \frac{2\delta(\varepsilon)}{x_0^2} \leq \varepsilon.$$

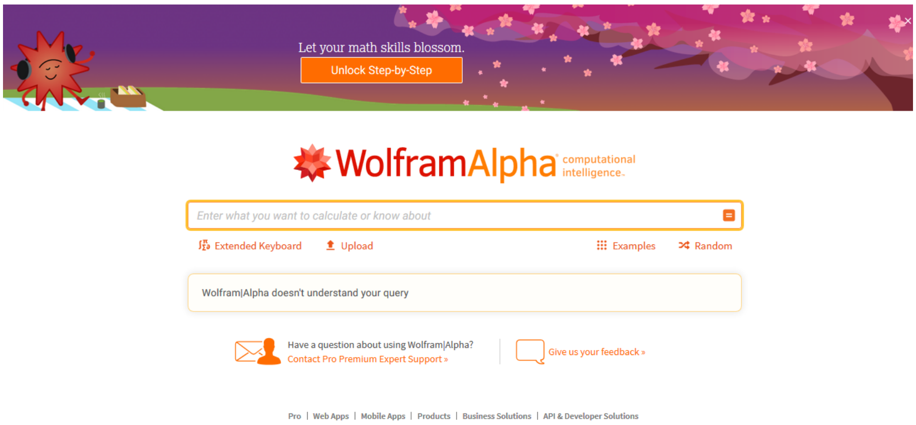
Aufgabe 3.2.4. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 3.2.2, dass $f(x) = x^2$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Ab hier wollen wir ein paar bildliche Betrachtungen zu möglichen Unstetigkeitsstellen geben.

Stellen wir uns also vor, die x_n sind die Positionen von einem Stift, dann bewegt sich der Stift auf den Punkt x_0 zu. Dann soll beim Zeichnen der Funktion bzw. des Graphen mit den Punkten $(x, f(x))$ auch die Punkte $(x_n, f(x_n))$ gegen den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehen.[2]

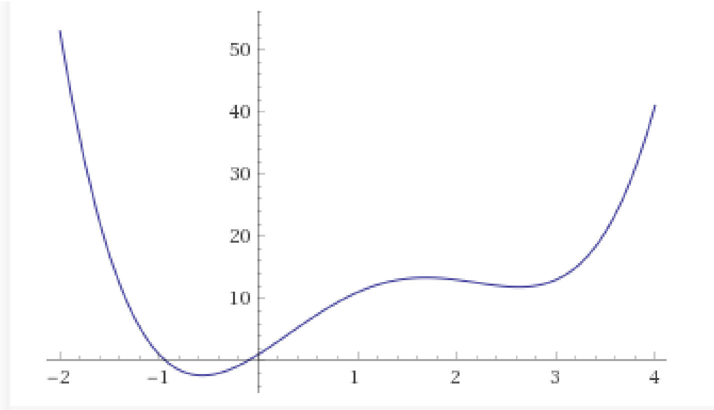
Schauen wir uns lieber ein paar Beispiel an. Diese Beispiele wie ich sie hier zeigen könnt ihr euch auch ganz einfach selbst zuhause am Computer zeichnen lassen. Dafür stehen z.B. online Versionen von GeoGebra und anderen Programmen zur Verfügung. Ich möchte euch aber ein sehr vielfältiges Onlineprogramm zeigen, nämlich Mathematica. Auch wenn die Uni dafür Lizenzen hat, so haben wir zur Zeit keine Uni. Also machen wir das mal online und jeder kann dafür selbst damit rumspielen:

https://www.wolframalpha.com/input



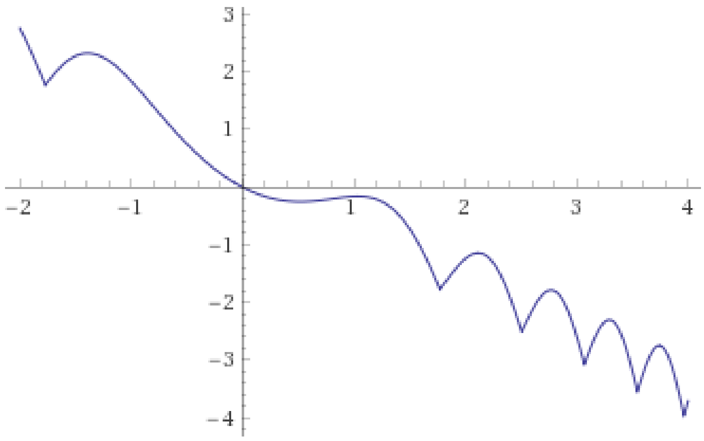
Schauen wir uns mal an, wie eine stetige Funktion gezeichnet aussieht, z.B. das Polynom $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 10x + 1$:

[2] Ohne Tafel ist das echt doof zu erklären und dafür jetzt ein 15 Sekunden Video hochzuladen ein bissel übertrieben, oder?



Hier sieht man schön, was man unter stetig versteht. Den Graphen kann man schön in einem Zug durch zeichnen.

Aber auch hier bei der Funktion $g(x) = |\sin x^2| - x$



ist der Graph durchgezeichnet. Er hat zwar hier und da ein paar Ecken/Spitzen, aber er bleibt durchgezeichnet und somit stetig. Die beiden Mathematica-Befehle für die Plots sind

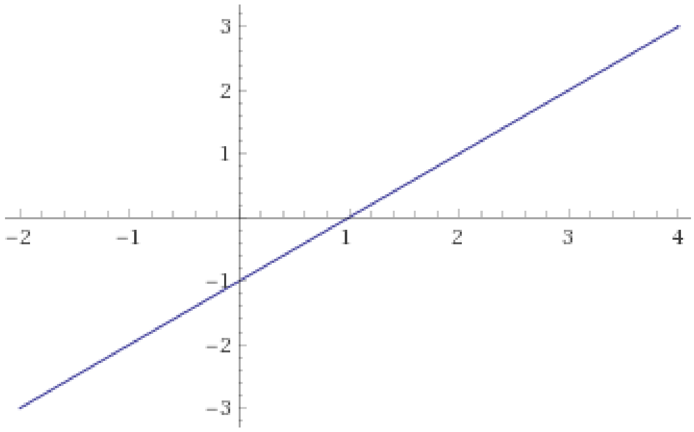
```
plot x^4 - 4x^3 + 4x^2 -10x+1, x=-2 to 4
```

und

```
plot |sin x^2| - x, x=-2 to 4
```

Da könnt ihr jetzt mal ein paar eigene Plots von Funktionen machen und euch die Graphen anschauen.

Schauen wir uns z.B. die Funktion $h(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ an. Wir sehen, dass wir durch $x + 1$ teilen, also ist die Funktion an $x_0 = -1$ nicht definiert. Am Graphen

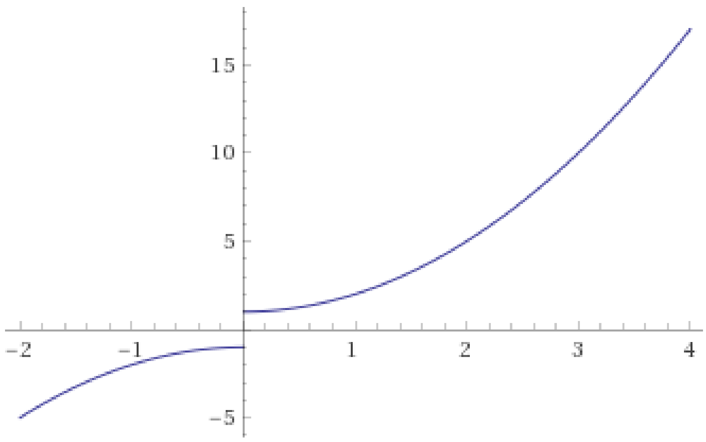


sehen wir aber, dass er bei $x_0 = -1$ keine Unstetigkeit aufweist. Obwohl die Funktion da also nicht definiert ist. Wir lernen also, dass ob eine Funktion an x_0 definiert ist oder ob sie an x_0 stetig ist zwei von einander unabhängige Dinge sind. Hier bei $h(x)$ haben wir, einige sehen es vllt. schon, das folgende:

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$$

für alle $x \neq -1$. Aber wenn wir $x_n \to -1$ gehen lassen und $x_n \neq -1$ gilt, dann haben wir $h(x_n) = x_n - 1 \to -1 - 1 = -2$ egal für welche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Schauen wir aber auf die Funktion $j(x) = (x^2+1)\cdot\frac{|x|}{x}$



so sehen wir an $x_0 = 0$ einen Sprung. Nehmen wir $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ und $y_n = -\frac{1}{n} \to 0$ so bekommen wir

$$j(x_n) = (n^{-2}+1)\cdot\frac{|n^{-1}|}{n^{-1}} = n^{-2}+1 \to 1$$

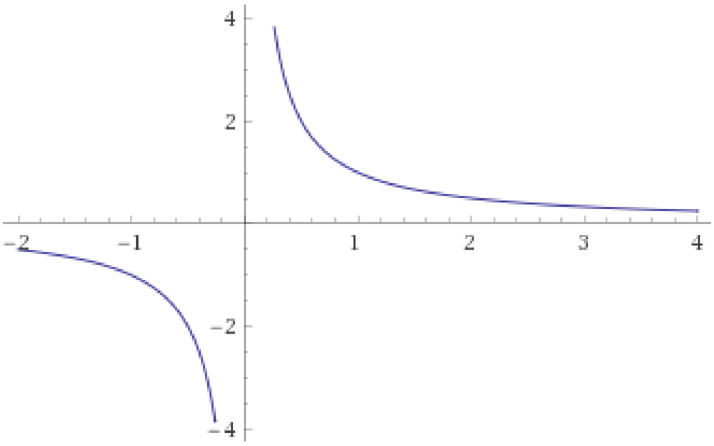
und

$$j(y_n) = ((-n)^{-2}+1)\cdot\frac{|(-n)^{-1}|}{(-n)^{-1}} = (n^{-2}+1)\cdot(-1) \to -1.$$

Die Funktion ist also an $x_0 = 0$ nicht stetig. Wir haben zwei Folgen x_n und y_n gefunden mit $x_n, y_n \to x_0$, $f(x_n) \to a$ und $f(y_n) = b$ aber $a \neq b$. Die Folge x_n kommt von rechts an $x_0 = 0$ heran, die Folge y_n kommt von links an $x_0 = 0$ heran. Beide $f(x_n)$ und $f(y_n)$

konvergieren auch, aber die Grenzwerte stimmen nicht überein. Das ist genau der Sprung im Graphen.

Unstetigkeiten können aber auch anders aussehen. So z.B. bei der Funktion $k(x) = \frac{1}{x}$:



Hier sehen wir auch einen Sprung, aber der Sprung ist unendlich groß. Die Funktion $k(x)$ geht natürlich für $x_n = \frac{1}{n}$ gegen $+\infty$:

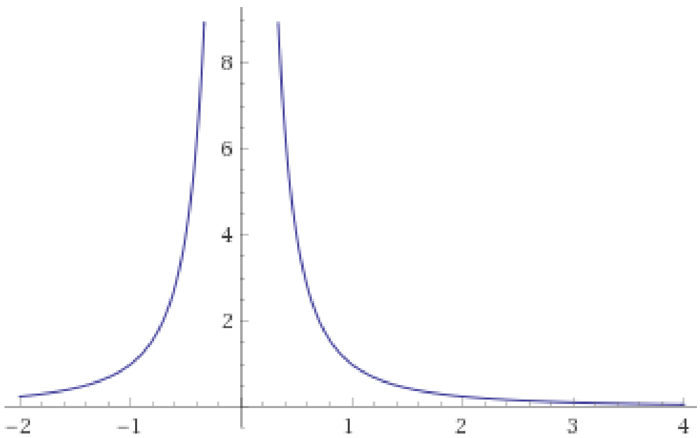
$$k(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to +\infty,$$

aber für die Folge $y_n = -\frac{1}{n}$ gegen $-\infty$:

$$k(y_n) = \frac{1}{-\frac{1}{n}} = -n \to -\infty.$$

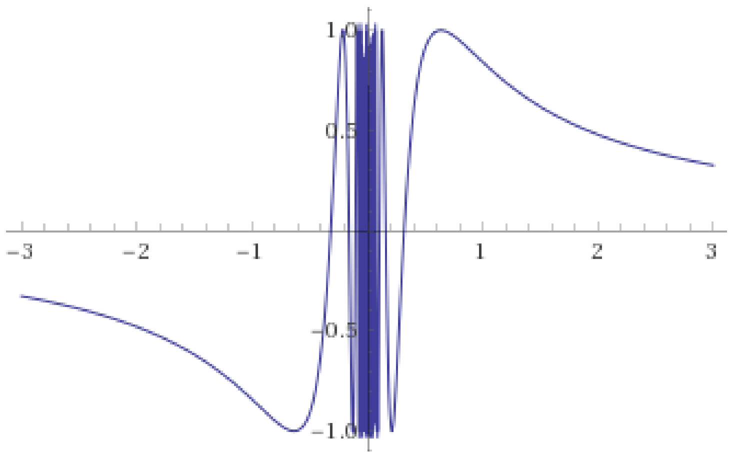
Damit haben wir also wieder zwei Folgen x_n und y_n gefunden die im Bild $f(x_n)$ und $f(y_n)$ nicht gegen einen gemeinsamen Grenzwert laufen. Hier kommt hinzu, dass die Grenzwerte auch noch uneigentlich sind, d.h. $\pm\infty$. Da tritt nie Stetigkeit auf.

Auch bei der Funktion $l(x) = \frac{1}{x^2}$

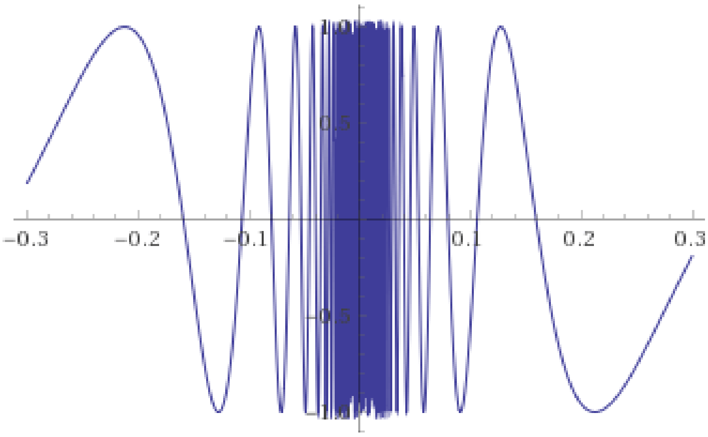


haben wir an $x_0 = 0$ eine Unstetigkeit. Auch wenn hier $f(x_n) = f(y_n) \to +\infty$ läuft, d.h. beide Grenzwerte stimmen überein, so ist er immer $+\infty$. Also nicht endlich und somit l and x_0 nicht stetig.

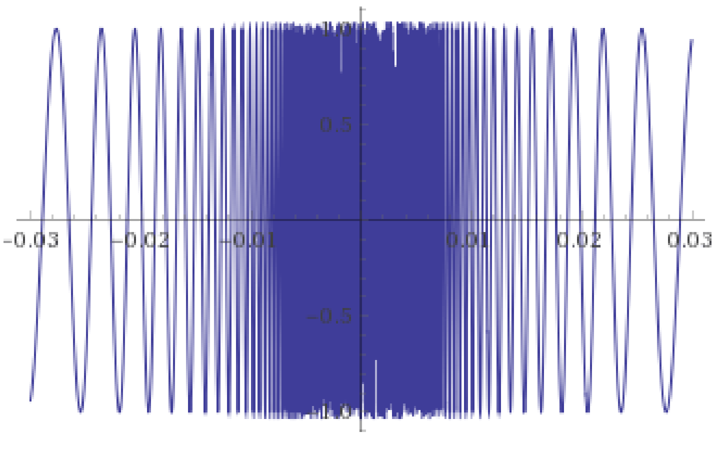
Schauen wir uns eine weitere Funktion an. Die Funktion $m(x) = \sin(x^{-1})$ die schon in der Vorlesung besprochen wurde:



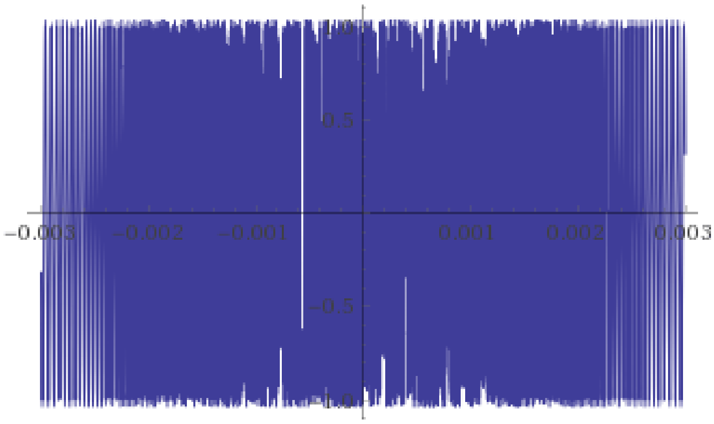
Wir sehen, irgendwas passiert an $x_0 = 0$. Zoomen wir mal näher ran (Intervall $[-0.3, 0.3]$):



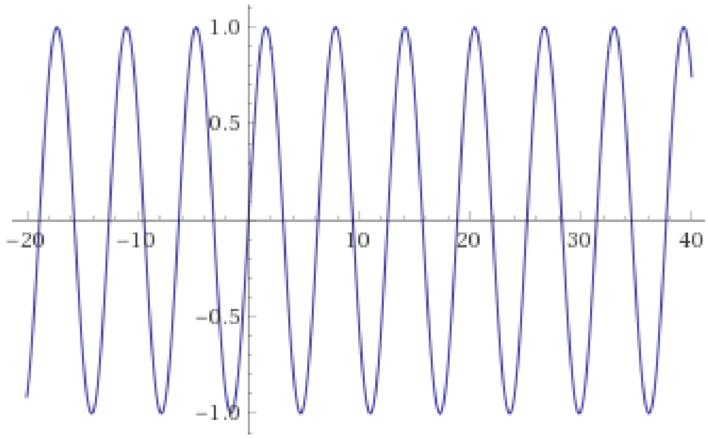
und noch weiter (Intervall $[-0.03, 0.03]$)



und noch weiter (Intervall $[-0.003, 0.003]$)



Dann erkennen wir, da $\frac{1}{x} \to \infty$ für $x \to 0$ geht, werden die Perioden, die der Sinus ansonsten auf der ganzen reellen Achse gleichmäßig (periodisch) verteilt hat



durch $\frac{1}{x}$ an $x_0 = 0$ gehäuft. Was unverändert bleibt ist, dass die Perioden von -1 bis $+1$ schwingen. Wie in der Vorlesung gezeigt können wir explizit Folgen x_n und y_n angeben, sodass

$$m(x_n) = 1 \to 1 \qquad \text{und} \qquad m(y_n) = 0 \to 0$$

gilt. Beide Folgen konvergieren aber haben nicht den gleichen Grenzwert. $m(x) = \sin(x^{-1})$ ist an $x_0 = 0$ nicht stetig.

Aufgabe 3.2.5. Zeichen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3}{(x+1)^2}.$$

Wo genau ist die Funktion unstetig, wo stetig? Beweisen Sie.

Lösungen

Reihen

Lösung (von Aufgabe 3.1.4). **a)** Sei $a_n = \left(\frac{5n^3-1}{7n^3+8}\right)^n$. Wir zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

absolut konvergent ist.

Wir haben

$$0 \leq a_n = |a_n| = \left(\frac{5n^3-1}{7n^3+8}\right)^n \leq \left(\frac{5n^3}{7n^3+8}\right)^n \leq \left(\frac{5n^3}{7n^3}\right)^n = \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

für alle $n \geq 2$. Wir können also $q = \frac{5}{7} \in [0,1)$ wählen und bekommen

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} q^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{5}{7}} = \frac{7}{2} < \infty.$$

Somit ist die Reihe absolut konvergent.

b) Sei $b_n = \left(\frac{5n^2+20n+121}{7n^3+8}\right)^n$. Wir zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent ist.

Wir beobachten, dass der Bruch in $(\,\cdot\,)^n$ das Folgende erfüllt:

$$\frac{5n^2+20n+121}{7n^3+8} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0.$$

Das ist also eine Nullfolge. Es gibt somit ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{5n^2+20n+121}{7n^3+8}\right| \quad \leq \quad \frac{1}{2}$$

für alle $n \geq N$. Für die b_n's bekommen wir dann also indem wir wieder in $(\,\cdot\,)^n$ einsetzen:

$$|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \geq N$. Unser q wählen wir daher als $\frac{1}{2}$.

Da wir nach (2.b) ja nur den unendlichen Schwanz der Reihe betrachten brauchen, machen wir das doch einfach. Und zwar hier ab dem Index N:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Damit haben wir also wieder absolute Konvergenz.

Lösung (von Aufgabe 3.1.7)**.** Wir zeigen mit dem Quotientenkriterium, dass folgende Reihen absolut konvergent sind.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{7^k}$

Wir haben $\frac{k^4}{7^k} \geq 0$ und

$$\frac{\frac{(k+1)^4}{7^{k+1}}}{\frac{k^4}{7^k}} = \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot \frac{7^k}{7^{k+1}} = \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot \frac{1}{7} \to \frac{1}{7}$$

d.h. absolute Konvergenz nach Quotientenkriterium.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot n!}$

Da $\frac{1}{n! \cdot n!} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{\frac{1}{(n+1)! \cdot (n+1)!}}{\frac{1}{n! \cdot n!}} = \frac{1}{(n+1)^2} \to 0$$

gilt, haben wir nach dem Quotientenkriterium absolute Konvergenz.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{3k-1}}{k^3 \cdot 5^{4k+1}}$

Wir haben wieder $\frac{3^{3k-1}}{k^3 \cdot 5^{4k+1}} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und den Quotienten

$$\frac{\frac{3^{3(k+1)-1}}{(k+1)^3 \cdot 5^{4(k+1)+1}}}{\frac{3^{3k-1}}{k^3 \cdot 5^{4k+1}}} = \frac{k^3}{(k+1)^3} \cdot \frac{3^{3(k+1)-1} \cdot 5^{4k+1}}{3^{3k-1} \cdot 5^{4(k+1)+1}} = \frac{k^3}{(k+1)^3} \cdot \frac{3^3}{5^4} \to \frac{3^3}{5^4} = \frac{27}{625}$$

und somit absolute Konvergenz.

Lösung (von Aufgabe 3.1.9)**.** Zeigen Sie mit dem Wurzelkriterium, dass die folgenden Reihen absolut konvergent sind.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n+7}$: Wir haben

$$\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+7}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2n+7}{n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+7n^{-1}} \to \frac{9}{16} = W < 1$$

und somit absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^{3n-2}$: Wir haben

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+4}\right)^{3n-2}} = \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^{\frac{3n-2}{n}} = \left(\frac{2n}{3n+4}\right)^{3-2n^{-1}} \to \left(\frac{2}{3}\right)^3 = W < 1$$

und somit absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium.

Lösung (von Aufgabe 3.1.11). **a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$: Wir haben

$$\frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n/2} = \frac{n^2}{\frac{3}{2}n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}$$

für alle $n \geq 2$ und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{2n-1}$: Wir haben $2n-1 \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch

$$\sqrt[5]{2n-1} \geq 1$$

was wiederum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{2n-1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

liefert.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4+14}{\sqrt[3]{n^4}+4}$: Wir haben

$$\frac{n^4}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{n^4}{n^{4/3}} = n^{4-4/3} = n^{8/3}$$

und somit

$$\frac{3n^4+14}{\sqrt[3]{n^4}+4} \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3n^4+14}{\sqrt[3]{n^4}+4} \geq 1$ für alle $n \geq N$. Dann folgt

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3n^4+14}{\sqrt[3]{n^4}+4} \geq \sum_{n=N}^{\infty} 1 = \infty.$$

Stetigkeit

Lösung (von Aufgabe 3.2.4). Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir müssen zwei Fallunterscheidungen machen: (a) $x_0 \neq 0$ und (b) $x_0 = 0$.

a) Sei $x_0 \neq 0$, dann wähle $\varepsilon > 0$ und wähle

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \min\left\{\frac{2}{|x_0|}, \frac{1}{2}|x_0|\right\},$$

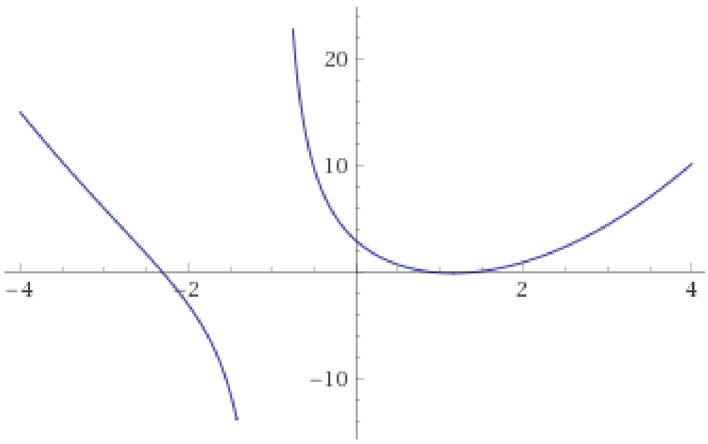
d.h. $|x| \leq 2|x_0|$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, dann folgt auch

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x^2 - xx_0 + xx_0 - x_0^2| \\ &\leq |x^2 - xx_0| + |xx_0 - x_0^2| \\ &= (|x| + |x_0|) \cdot |x - x_0| \\ &\leq 3|x_0| \cdot |x - x_0| \\ &\leq 3|x_0| \cdot \delta \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

b) Für $x_0 = 0$ und $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Dann gilt für all $x \in (-\delta, \delta)$

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= x^2 \\ &\leq \delta^2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lösung (von Aufgabe 3.2.5)**.** Wir zeichnen die Funktion $f(x) = \frac{x^4+x^3-4x^2-x+3}{(x+1)^2}$:



Wir vermuten am Grapen also, dass f an $x_0 = -1$ eine Unstetigkeit hat und sonst stetig ist. Berechnen wir

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 - 4x + 3}{x + 1}$$

so finden wir, dass f an $x \neq x_0 = -1$ stetig ist. An $x_0 = -1$ hat der Zähle $x^3 - 4x + 3$ aber den Wert 6 und der Nenner $x + 1$ eine Nullstelle. Wählen wir also $x_n = -1 + \frac{1}{n}$ so haben wir

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{(-1 + n^{-1})^3 - 4(-1 + n^{-1}) + 3}{-1 + n^{-1} + 1} \\ &= \frac{(-1 + n^{-1})^3 - 4(-1 + n^{-1}) + 3}{n^{-1}} \\ &= \underbrace{[(-1 + n^{-1})^3 - 4(-1 + n^{-1}) + 3]}_{\to 6} \cdot n \to +\infty. \end{aligned}$$

An $x_0 = -1$ liegt also eine Unstetigkeit vor.